Resol

Pàgina 301

Moviment d'una partícula

Un investigador, per estudiar el moviment d'una partícula, l'ha il·luminat amb llampades de flaix cada dècima de segon (0,1 s) durant quatre segons. Aquesta és la fotografia a escala real:

1. Aproxima la velocitat de la partícula en l'instant $t = 2$ s i troba la velocitat mitjana en els intervals [2; 2,5] i [2; 2,1]. Per a això, pren mesures sobre la fotografia.

2. Calcula les velocitats mitjanes anteriors prenent valors sobre l'equació del moviment d'aquesta partícula: $e = \frac{1}{2}(t^4 - 8t^3 + 18t^2)$

3. Troba ara les velocitats mitjanes en els intervals [2; 2,001] i [2; 2,000001] prenent de nou valors sobre l'equació del moviment de la partícula. ¿Podem considerar que aquesta última velocitat mitjana és molt semblant a la velocitat instantània en $t = 2$ s?

1. La distància que separa els punts en els instants $t = 2$ i $t = 2{,}5$ és de 12,5 mm; per tant, la velocitat és:

$$\frac{12{,}5}{0{,}5} = 25 \text{ mm/s} = 2{,}5 \text{ cm/s}$$

La distància que separa els punts en els instants $t = 2$ i $t = 2{,}1$ és de 3,5 mm; per tant, la velocitat és:

$$\frac{3{,}5}{0{,}1} = 33 \text{ mm/s} = 3{,}5 \text{ cm/s}$$

2. $$\left.\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{2}(2^4 - 8\cdot 2^3 + 18\cdot 2^2) = 12 \text{ cm} \\ s_2 &= \frac{1}{2}(2{,}5^4 - 8\cdot 2{,}5^3 + 18\cdot 2{,}5^2) = 13{,}28 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v_1 = \frac{13{,}28 - 12}{0{,}5} = 2{,}56 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_3 &= \frac{1}{2}(2{,}1^4 - 8\cdot 2{,}1^3 + 18\cdot 2{,}1^2) = 12{,}37 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v_2 = \frac{12{,}37 - 12}{0{,}1} = 3{,}77 \text{ cm/s}$$

3. $$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_4 &= \frac{1}{2}(2{,}001^4 - 8\cdot 2{,}001^3 + 18\cdot 2{,}001^2) = 12{,}003997 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v = \frac{12{,}003997 - 12}{0{,}001} = 3{,}997 \text{ cm/s}$$

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= 12 \text{ cm} \\ s_5 &= \frac{1}{2}(2{,}000001^4 - 8\cdot 2{,}000001^3 + 18\cdot 2{,}000001^2) = 12{,}000004 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \to v = \frac{12{,}000004 - 12}{0{,}000001} = 4 \text{ cm/s}$$

Sí, podem considerar que aquesta última velocitat és molt semblant a la velocitat instantània en $t = 2$ s perquè l'interval de temps transcorregut és tan sols una milionèsima de segon.

1 Mesura del creixement d'una funció

Pàgina 302

Fes-ho tu. Troba la TVM de $y = \sqrt{x-1}$ en $[1, 2]$, $[1, 5]$ i $[1, 10]$.

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{\sqrt{1}-\sqrt{0}}{1} = 1$$

$$\text{TVM } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{\sqrt{4}-\sqrt{0}}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{TVM } [1, 10] = \frac{f(10)-f(1)}{10-1} = \frac{\sqrt{9}-\sqrt{0}}{9} = \frac{1}{3}$$

1 Cert o fals?

a) La TVM mesura el creixement mitjà d'una funció en un interval.

b) Si f és creixent en $[a, b]$, la TVM en aquest interval és positiva, i si és decreixent, la TVM és negativa.

c) Si la TVM de f en $[a, b]$ és 0, significa que f és constant en $[a, b]$.

a) Cert.

b) Cert. El signe de la TVM depèn només del signe del numerador. Si f és creixent $f(b) > f(a)$, aleshores el numerador és positiu. Si f és decreixent, $f(b) < f(a)$, aleshores el numerador és negatiu.

c) Fals. Només podem afirmar que $f(a) = f(b)$. Això no vol dir que sigui constant.

2 Troba la TVM de la funció $y = x^2 - 8x + 12$ en els intervals següents:

$[1, 2]$, $[1, 3]$, $[1, 4]$, $[1, 5]$, $[1, 6]$, $[1, 7]$, $[1, 8]$

$$\text{TVM } [1, 2] = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{0-5}{1} = -5$$

$$\text{TVM } [1, 3] = \frac{f(3)-f(1)}{3-1} = \frac{-3-5}{2} = -4$$

$$\text{TVM } [1, 4] = \frac{f(4)-f(1)}{4-1} = \frac{-4-5}{3} = -3$$

$$\text{TVM } [1, 5] = \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{-3-5}{4} = -2$$

$$\text{TVM } [1, 6] = \frac{f(6)-f(1)}{6-1} = \frac{0-5}{5} = -1$$

$$\text{TVM } [1, 7] = \frac{f(7)-f(1)}{7-1} = \frac{5-5}{6} = 0$$

$$\text{TVM } [1, 8] = \frac{f(8)-f(1)}{8-1} = \frac{12-5}{7} = 1$$

3 **Troba la TVM de $y = x^2 - 8x + 12$ en l'interval variable [1, 1 + h].**

Comprova que, donant a h els valors adequats, s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

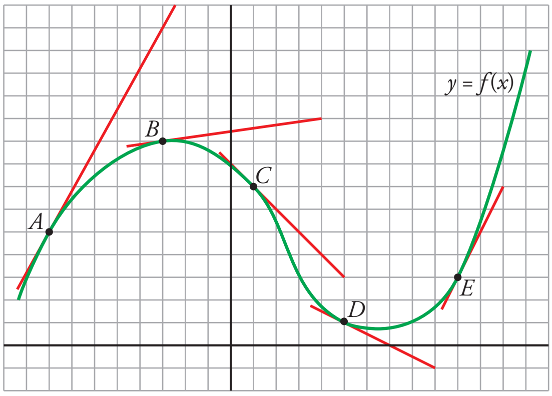
$$\text{TVM } [1,\ 1+\text{h}] = \frac{f(1+\text{h}) - f(1)}{\text{h}} = \frac{(1+\text{h})^2 - 8(1+\text{h}) + 12 - 5}{\text{h}} = \frac{\text{h}^2 - 6\text{h}}{\text{h}} = \frac{\text{h}(\text{h}-6)}{\text{h}} = \text{h} - 6$$

Donant a h els valors 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, s'obtenen els resultats de l'exercici anterior.

Pàgina 303

4 **En la gràfica, en verd, de la funció $y = f(x)$ adjunta, s'han assenyalat cinc punts: A, B, C, D i E.**

En cada un està traçada la recta tangent, el pendent de la qual es pot calcular.



Expressa els resultats usant expressions del tipus:

$f'(a) = \ldots$

Per exemple, per al punt B:

$f'(-3) = \ldots$

PUNT	PENDENT
A	$f'(-8) = \frac{9}{5}$
B	$f'(-3) = \frac{1}{7}$
C	$f'(1) = -1$
D	$f'(5) = -\frac{1}{2}$
E	$f'(10) = 2$

2 Obtenció de la derivada a partir de l'expressió analítica

Pàgina 305

Fes-ho tu. **Troba la derivada de $y = \dfrac{3}{x-2}$ en els punts d'abscisses 1, –1 i 5.**

- $f'(1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$

$$f(1+h) = \frac{3}{1+h-2} = \frac{3}{h-1}$$

$$f(1) = \frac{3}{1-2} = -2$$

$$f(1+h) - f(1) = \frac{3}{h-1} - (-3) = \frac{3h}{h-1}$$

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{\frac{3h}{h-1}}{h} = \frac{3}{h-1}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{3}{h-1} = -3$$

- $f'(-1) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h}$

$$f(-1+h) = \frac{3}{-1+h-2} = \frac{3}{h-3}$$

$$f(-1) = \frac{3}{-1-2} = -1$$

$$f(-1+h) - f(-1) = \frac{3}{h-3} - (-1) = \frac{h}{h-3}$$

$$\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\frac{h}{h-3}}{h} = \frac{1}{h-3}$$

$$f'(-1) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h-3} = -\frac{1}{3}$$

- $f'(5) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h}$

$$f(5+h) = \frac{3}{5+h-2} = \frac{3}{h+3}$$

$$f(5) = \frac{3}{5-2} = 1$$

$$f(5+h) - f(5) = \frac{3}{h+3} - 1 = \frac{-h}{h+3}$$

$$\frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \frac{\frac{-h}{h+3}}{h} = -\frac{1}{h+3}$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \left(-\frac{1}{h+3}\right) = -\frac{1}{3}$$

Fes-ho tu. **Troba la derivada de $y = \frac{x^2}{2} + 7x$ en els punts d'abscisses amb $x = 0, 1, 2, 3, 4$ i 5.**

$$f(x+h) = \frac{(x+h)^2}{2} + 7(x+h) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x^2}{2} + xh + \frac{h^2}{2} + 7x + 7h - \left(\frac{x^2}{2} + 7x\right) = xh + \frac{h^2}{2} + 7h$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{xh + \frac{h^2}{2} + 7h}{h} = x + \frac{h}{2} + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \left(x + \frac{h}{2} + 7\right) = x + 7$$

$f'(0) = 0 + 7 = 7$ $f'(1) = 1 + 7 = 8$ $f'(2) = 9$ $f'(3) = 10$ $f'(4) = 11$ $f'(5) = 12$

1 Cert o fals?

a) La derivada d'una funció, $y = f(x)$, en $x = a$ és el pendent de la recta tangent a la gràfica de la funció en aquest punt.

b) $f'(3) = 0$ significa que la tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en $x = 3$ és paral·lela a l'eix X.

c) Si $f'(2) > 0$, aleshores f és creixent en el punt d'abscissa 2.

a) Cert.

b) Cert. El pendent de la recta tangent en $x = 3$ és zero; per tant, la recta és horitzontal.

c) Cert, a causa de la inclinació de la recta tangent a f en aquest punt.

2 Troba la derivada de $y = \frac{1}{x}$ en el punt d'abscissa –2.

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h}$$

$$f(-2+h) - f(-2) = \frac{1}{-2+h} + \frac{1}{2} = \frac{-2+h+2}{2(-2+h)} = \frac{h}{2h-4}$$

$$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h}{2h-4}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2h-4} = -\frac{1}{4}$$

3 Troba la derivada de $y = -2x + 4$ en els punts d'abscisses –3, 0, 4 i 7. Explica per què obtens en tots els casos el mateix resultat.

- $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-3+h) - f(-3)}{h}$

  $f(-3 + h) - f(-3) = -2(-3 + h) + 4 - 10 = 6 - 2h - 6 = -2h$

  $f'(-3) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h}$

  $f(h) - f(0) = -2h + 4 - 4 = -2h$

  $f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h} = -2$

- $f'(4) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$

  $f(4 + h) - f(4) = -2(4 + h) + 4 - (-4) = -8 - 2h + 8 = -2h$

  $f'(4) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

- $f'(7) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(7+h) - f(7)}{h}$

  $f(7 + h) - f(7) = -2(7 + h) + 4 - (-10) = -14 - 2h + 14 = -2h$

  $f'(7) = \lim_{h \to 0} \dfrac{-2h}{h} = -2$

Com que la funció és una línia recta, creix o decreix sempre de la mateixa forma i, en ser la derivada una manera de mesurar el creixement d'una funció, aquesta ha de valer el mateix en tots els punts.

4 Troba la derivada de $y = 3x^2 - 5x + 1$ en els punts d'abscisses –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5 i 6.

Calculem la derivada de manera general i l'avaluem en cada un dels punts demanats.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x + h) - f(x) = 3(x + h)^2 - 5(x + h) + 1 - (3x^2 - 5x + 1) =$$

$$= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - 5x - 5h + 1 - 3x^2 + 5x - 1 = 3h^2 + 6hx - 5h$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{3h^2 + 6hx - 5h}{h} = \lim_{h \to 0} (3h + 6x - 5) = 6x - 5$$

$f'(-2) = -17$

$f'(-1) = -11$

$f'(0) = -5$

$f'(1) = 1$

$f'(2) = 7$

$f'(3) = 13$

$f'(4) = 19$

$f'(5) = 25$

$f'(6) = 31$

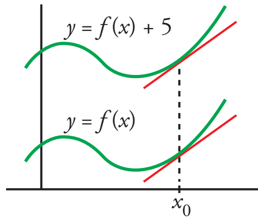
3 Funció derivada d'una altra

Pàgina 306

1 Cert o fals?

Les rectes tangents en un punt qualsevol, x_0, a les gràfiques de $y = f(x)$ i $y = f(x) + 5$ són paral·leles.

Això significa que les dues funcions tenen la mateixa funció derivada.



Cert, perquè, en ser paral·leles les rectes tangents en qualsevol punt, han de tenir el mateix pendent en tots els punts.

2 Troba la derivada de $f(x) = \dfrac{3}{x-2}$ i, a partir d'aquesta, calcula $f'(4)$, $f'(-1)$, $f'(1)$ i $f'(5)$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{3}{x+h-2} - \dfrac{3}{x-2}}{h} = 3 \cdot \frac{\dfrac{x-2-x-h+2}{(x+h-2)(x-2)}}{h} = \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-3}{(x+h-2)(x-2)} = \frac{-3}{(x-2)^2}$$

$$f'(4) = \frac{-3}{4}$$

$$f'(-1) = \frac{-1}{3}$$

$$f'(1) = -3$$

$$f'(5) = \frac{-1}{3}$$

3 Troba la funció derivada de $f(x) = \sqrt{x-3}$ i calcula els pendents de les rectes tangents a la corba en els punts d'abscisses $x = 4$ i $x = 7$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h-3}-\sqrt{x-3})(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} =$$

$$= \frac{x+h-3-(x-3)}{h(\sqrt{x+h-3}+\sqrt{x-3})} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x-3}+\sqrt{h+x-3}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}$$

$$f'(4) = \frac{1}{2}$$

$$f'(7) = \frac{1}{4}$$

4 Troba la funció derivada de $f(x) = x^3 + x^2$.

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3+(x+h)^2-(x^3+x^2)}{h} = \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx+x^2-x^3-x^2}{h} =$$

$$= \frac{3hx^2+3h^2x+h^3+h^2+2hx}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 + h + 2x) = 3x^2 + 2x$$

Pàgina 307

5 En la fórmula que serveix per trobar l'equació de la tangent a la corba $y = f(x)$ en un punt

$$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

digues el paper que exerceix cada una de les lletres que hi intervenen. De quina funció és variable independent la x?

a és l'abscissa del punt en què es troba la recta tangent.

$f(a)$ és l'ordenada d'aquest punt.

$f'(a)$ és el pendent de la recta tangent o, també, la derivada de la funció en el punt d'abscissa a.

x és la variable independent de la recta tangent.

y és la variable dependent d'aquesta recta.

4 Regles per obtenir les derivades d'algunes funcions

Pàgina 308

1 Calcula: a) $D(x^5)$ b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right)$ c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right)$ d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right)$ e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right)$

a) $D(x^5) = 5x^4$

b) $D\left(\frac{1}{x^2}\right) = D(x^{-2}) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$

c) $D\left(\sqrt[3]{x}\right) = D(x^{1/3}) = \frac{1}{3}x^{(1/3)-1} = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $D\left(\sqrt[3]{x^2}\right) = D(x^{2/3}) = \frac{2}{3}x^{(2/3)-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

e) $D\left(\frac{\sqrt{x^3}\cdot\sqrt[3]{x^4}}{x^2}\right) = D\left(\frac{x^{3/2}\cdot x^{4/3}}{x^2}\right) = D\left(x^{5/6}\right) = \frac{5}{6}x^{(5/6)-1} = \frac{5}{6\sqrt[6]{x}}$

Pàgina 310

Fes-ho tu. Troba la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = 5x^4 - 2x^2 + 3x - 7$ **b)** $g(x) = \sqrt{5x} - \sqrt[3]{3x^4}$ **c)** $h(x) = \frac{3x}{x^2\sqrt[3]{x}}$

a) $f'(x) = 5\cdot 4x^3 - 2\cdot 2x + 3 = 20x^3 - 4x + 3$

b) $g(x) = \sqrt{5}\,\sqrt{x} - \sqrt[3]{3}\,\sqrt[3]{x^4} = \sqrt{5}\,x^{1/2} - \sqrt[3]{3}\,x^{4/3}$

$g'(x) = \sqrt{5}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - \sqrt[3]{3}\cdot\frac{4}{3}x^{1/3} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \frac{4\sqrt[3]{3}}{3}\sqrt[3]{x}$

c) $h(x) = \frac{3x}{x^2\,x^{1/3}} = 3x^{-4/3}$

$h'(x) = 3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)x^{-7/3} = -\frac{4}{x^{7/3}} = -\frac{4}{x^2\sqrt[3]{x}}$

Fes-ho tu. Troba la funció derivada de les funcions següents:

a) $f(x) = \frac{5^{4x}}{125}$ **b)** $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + x - 3}$ **c)** $h(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 2x - 1}{x}$

a) $f(x) = \frac{1}{125}(5^4)^x = \frac{1}{125}625^x$

$f'(x) = \frac{1}{125}625^x\,ln\,625 = \frac{ln\,625}{125}625^x$

b) $g'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2+x-3) - (x^2-3x+1)\cdot(2x+1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{2x^3 - x^2 - 9x + 9 - (2x^3 - 5x^2 - x + 1)}{(x^2+x-3)^2} = \frac{4x^2 - 8x + 8}{(x^2+x-3)^2}$

c) $h(x) = x^2 - 5x + 2 - \frac{1}{x}$

$h'(x) = 2x - 5 + \frac{1}{x^2}$

Troba la funció derivada de les funcions següents:

2 $f(x) = 5x^2 + 7x - 2\sqrt{x}$

$$f'(x) = 5 \cdot 2x + 7 - 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = 10x + 7 - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

3 $f(x) = \sqrt{3x^3} \cdot e^x$

$$f(x) = \sqrt{3}\,\sqrt{x^3}\,e^x = \sqrt{3}\,x^{3/2}\,e^x$$

$$f'(x) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}x^{1/2}\,e^x + x^{3/2}\,e^x\right) = \sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\,e^x + x\sqrt{x}\,e^x\right) = \sqrt{3x}\,e^x\left(\frac{3}{2} + x\right)$$

4 $f(x) = \dfrac{e^x \cdot \cos x}{2^{x+4}}$

$$f(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x}{2^x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{(e^x \cos x - e^x \sin x)\,2^x - e^x \cos x\,2^x \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x \cos x - e^x \sin x - e^x \cos x \ln 2}{2^x} =$$

$$= \frac{1}{2^4} \cdot \frac{e^x\,(\cos x - \sin x - \ln 2 \cos x)}{2^x}$$

5 $f(x) = x \cdot 3^x \cdot tg\,x$

$$f'(x) = 3^x \cdot tg\,x + x \cdot 3^x \ln 3 \cdot tg\,x + \frac{x \cdot 3^x}{\cos^2 x}$$

6 $f(x) = \dfrac{\log_2 x}{x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} \cdot x - \log_2 x \cdot 1}{x^2} = \frac{\frac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \frac{1 - \ln 2 \log_2 x}{x^2 \ln 2}$$

7 $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{x^2}$

$$f(x) = 2x - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2} = 2x - 5 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot x^{-2}$$

$$f'(x) = 2 + \frac{5}{x^2} + 3 \cdot (-2)\,x^{-3} = 2 + \frac{5}{x^2} - \frac{6}{x^3}$$

8 $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x\,(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\,2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

9 $f(x) = (\arcsin x)(x + 3)$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(x + 3) + (\arcsin x) \cdot 1 = \frac{x + 3}{\sqrt{1 - x^2}} + \arcsin x$$

10 $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\cos x}$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x - (\arcsin x)(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2}} \cos x + (\arcsin x) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sqrt{1 - x^2}\,(\arcsin x) \sin x}{\sqrt{1 - x^2}\,\cos^2 x}$$

11 $f(x) = \dfrac{x^2 \cdot 5^x}{x^3}$

$f(x) = \dfrac{1}{x}5^x$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}5^x + \dfrac{1}{x}5^x \, ln\, 5 = 5^x \dfrac{x \, ln\, 5 - 1}{x^2}$

Pàgina 311

Troba la funció derivada de les funcions següents:

12 $f(x) = sin\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5)\; cos\,(x^2 - 5x + 7)$

13 $f(x) = \sqrt[3]{(5x+3)^2} = (5x+3)^{2/3}$

$f'(x) = \dfrac{2}{3}(5x+3)^{-1/3} \cdot 5 = \dfrac{10}{3\sqrt[3]{5x+3}}$

14 $f(x) = sin^2\left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$D\left(sin^2\left(3x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{cases} (a^2)' = 2a \\ (sin\,\alpha)' = cos\,\alpha \\ \left(3x + \dfrac{\pi}{2}\right)' = 3 \end{cases}$$

$f'(x) = 2\,sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 6\,sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)$

També, utilitzant la fórmula del sinus de l'angle doble, podríem donar el resultat així:

$f'(x) = 2\,sin\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right) cos\left(3x+\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot 3 = 3\,sin\,(6x+\pi) = -3\,sin\,6x$

15 $f(x) = \dfrac{log\,x^2}{x}$

$f(x) = \dfrac{2\,log\,x}{x} \rightarrow f'(x) = \dfrac{2\,(1 - ln\,10\,log\,x)}{x^2\,ln\,10}$

16 $f(x) = cos\,(3x - \pi)$

$f'(x) = -3\,sin\,(3x - \pi)$

17 $f(x) = \sqrt{1+2x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}$

18 $f(x) = x\,e^{2x+1}$

$f'(x) = e^{2x+1} + x\,e^{2x+1}\cdot 2 = e^{2x+1}\,(1+2x)$

19 $f(x) = \dfrac{sin\,(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$

$f'(x) = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}\;cos\,(x^2+1) + [x\,sin\,(x^2+1)]/\sqrt{1-x^2}}{1-x^2} = \dfrac{2x\,(1-x^2)\,cos\,(x^2+1) + x\,sin\,(x^2+1)}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$

5 Utilitat de la funció derivada

Pàgina 312

Fes-ho tu. Troba les rectes tangents a $y = x^3 - 2x^2$ paral·leles a $y = -x$.

Busquem les rectes de pendent –1:

$$f(x) = x^3 - 2x^2 \rightarrow f'(x) = 3x^2 - 4x$$

L'equació $f'(x) = -1$ ens proporciona les abscisses dels punts en què les rectes tangents són paral·leles a la recta donada.

$$f'(x) = -1 \rightarrow 3x^2 - 4x = -1 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{3},\ x_2 = 1$$

$$x = \frac{1}{3} \rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 - 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 = -\frac{5}{27} \rightarrow \text{Recta tangent } y = -1\cdot\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{5}{27} \rightarrow y = -x + \frac{4}{27}$$

$$x = 1 \rightarrow f(1) = 1^3 - 2\cdot 1^2 = -1 \rightarrow \text{Recta tangent } y = -1\cdot(x-1) - 1 \rightarrow y = -x$$

Pàgina 313

Fes-ho tu. Troba els punts singulars de $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$ i determina els intervals on creix o decreix.

Resolem l'equació $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$$

$f(1) = 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 3 = 10 \rightarrow (-1, 10)$ és un punt singular.

$f(2) = 2\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 - 12\cdot 2 + 3 = -17 \rightarrow (2, -17)$ és un altre punt singular.

Tenint en compte les branques infinites:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (2x^3 - 3x^2 - 12x + 3) = -\infty$$

Tenim que els intervals $(-\infty, -1)$ i $(2, +\infty)$ són intervals de creixement. En l'interval $(-1, 2)$ la funció decreix.

Pàgina 314

1 Troba les equacions de les rectes tangents a la gràfica de la funció $y = x^4 - 2x - 3$ en els punts d'abscissa –1, 0 i 2.

$f(x) = x^4 - 2x - 3 \qquad f'(x) = 4x^3 - 2$

- $f(-1) = 6 \qquad f'(-1) = -6$

  La recta tangent en $x = -1$ és $y = -6(x + 1) + 6$; és a dir, $y = -6x$.

- $f(0) = -3 \qquad f'(0) = -2$

  La recta tangent en $x = 0$ és $y = -2(x - 0) - 3$; és a dir, $y = -2x - 3$.

- $f(2) = 9 \qquad f'(2) = 30$

  La recta tangent en $x = 2$ és $y = 30(x - 2) + 9$; és a dir, $y = 30x - 51$.

2 **Troba les equacions de les rectes tangents a la gràfica de la funció $y = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 3x$ el pendent de les quals sigui 3.**

Perquè el pendent de la recta tangent sigui 3, ha de ser $f'(x) = 3$.

$$f'(x) = x^3 - 4x + 3$$

$f'(x) = 3 \rightarrow x^3 - 4x + 3 = 3 \rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = -2$ són les abscisses dels punts en què el pendent és 3.

$x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow$ La recta tangent és $y = 3x$.

$x_2 = 2 \rightarrow f(2) = 2 \rightarrow$ La recta tangent és $y = 3(x - 2) + 2$; és a dir, $y = 3x - 4$.

$x_3 = -2 \rightarrow f(-2) = -10 \rightarrow$ La recta tangent és $y = 3(x + 2) - 10$; és a dir, $y = 3x - 4$.

3 **Troba el valor màxim de la funció $y = -x^3 + 12x + 3$ en l'interval $[0, 3]$ i en l'interval $[-5, 3]$. Troba el mínim en cada un d'aquests intervals.**

Calculem primer els punts singulars de la funció:

$$f'(x) = -3x^2 + 12$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow -3x^2 + 12 = 0 \rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 2$$

- En l'interval [0, 3] avaluem:

  $f(0) = 3 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El màxim es troba en $x = 2$ i val 19.

  El mínim es troba en $x = 0$ i val 3.

- En l'interval [–5, 3] avaluem:

  $f(-5) = 68 \quad f(-2) = -13 \quad f(2) = 19 \quad f(3) = 12$

  El màxim es troba en $x = -5$ i val 68.

  El mínim es troba en $x = -2$ i val –13.

4 **Troba els límits següents aplicant la regla de l'Hôpital:**

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\,3x}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x}$

a) $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 + 3x - 10} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{2x - 5}{2x + 3} = \frac{-1}{7}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{5x}{tg\,3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{5}{(1 + tg^2\,3x) \cdot 3} = \frac{5}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10}}{1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = 0$

6 Representació de funcions

Pàgina 316

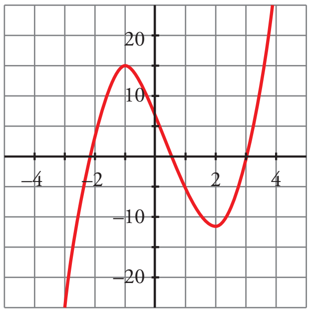
1 Representa aquestes funcions:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$ **b)** $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$ **c)** $y = x^4 + 4x^3$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Màxim en (–1, 15).

Mínim en (2, –12).



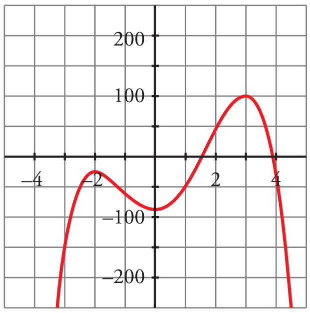
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \dfrac{1 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$

Màxim en (–2, –26) i en (3, 99).

Mínim en (0, –90).



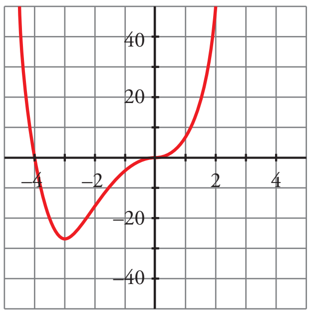
c) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

Mínim en (–3, –27).

Punt d'inflexió en (0, 0).

$f(x) = 0 \rightarrow x^3(x + 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$

Punts de tall amb els eixos: (0, 0) i (–4, 0).



Pàgina 318

2 Representa les funcions racionals següents, seguint els passos de la pàgina anterior:

a) $y = \dfrac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$ **b)** $y = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 1}$ **c)** $y = \dfrac{x^2}{x^2 + 1}$

d) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ **e)** $y = \dfrac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$ **f)** $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

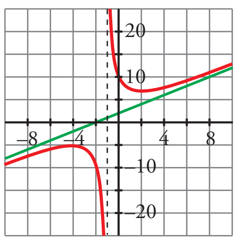
a) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2 + 2x + 3x + 3 + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x+1)^2} =$

$= \dfrac{x^2 + 2x - 8}{(x+1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$

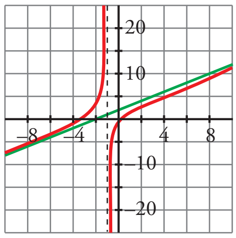
Màxim en (–4, –5). Mínim en (2, 7).

Asímptota vertical: $x = -1$

Asímptota obliqua: $y = x + 2$



b) $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(x+1)-(x^2+3x)}{(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+3x+3-x^2-3x}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2+2x+3}{(x+1)^2} \neq 0$

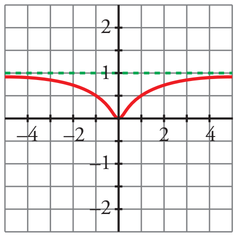


Punts de tall amb els eixos: (0, 0) i (–3, 0)

Asímptota vertical: $x = -1$

Asímptota obliqua: $y = x + 2$

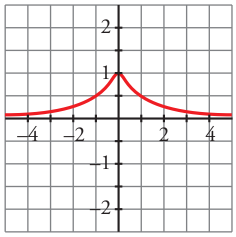
c) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$



Mínim en (0, 0).

Asímptota horitzontal: $y = 1$

d) $f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \rightarrow x = 0$

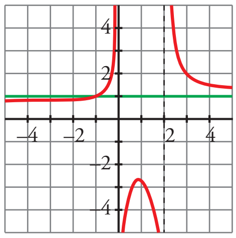


Màxim en (0, 1).

Asímptota horitzontal: $y = 0$

e) $f'(x) = \dfrac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \dfrac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$

$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$



Máxim en (0,73; –2,73).

Mínim en (–2,73; 0,73).

Asímptotes verticals: $x = 0$, $x = 2$

Asímptota horitzontal: $y = 1$

f) • Domini = $\mathbb{R} - \{0\}$

• Asímptota vertical:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2-1}{x^2} = -\infty \end{array}\right\} \; x = 0 \text{ és asímptota vertical}$$

• Asímptota horitzontal:

$y = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 1 - \dfrac{1}{x^2}$; $y = 1$ és asímptota horitzontal

Quan $x \to -\infty$, $y < 1$; i quan $x \to +\infty$, $y < 1$.

Per tant, la corba està per sota de l'asímptota.

• Punts singulars:

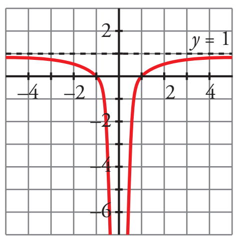
$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x^2 - (x^2-1)\cdot 2x}{x^4} = \dfrac{2x^3-2x^3+2x}{x^4} = \dfrac{2x}{x^4} = \dfrac{2}{x^3}$

$f'(x) \neq 0 \rightarrow f(x)$ no té punts singulars

Observem que $f'(x) < 0$ si $x < 0$; i que $f'(x) > 0$ si $x > 0$.

Aleshores la funció és decreixent en $(-\infty, 0)$ i és creixent en $(0, +\infty)$.

• Talla l'eix X en (–1, 0) i (1, 0).



Exercicis i problemes resolts

Pàgina 319

1. Funció derivada a partir de la definició

Fes-ho tu. **Donada $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, troba $f'(x)$ aplicant-hi la definició.**

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1} = \frac{(x+h)(x+1) - x(x+h+1)}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{x^2 + x + hx + h - x^2 - xh - x}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{h}{(x+h+1)(x+1)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{(x+h+1)(x+1)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{(x+h+1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

2. Regles de derivació

Fes-ho tu. **Troba $f'(x)$ sent: $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)^2$**

$$f(x) = 2\ln\frac{x+1}{x} = 2[\ln(x+1) - \ln x]$$

$$f'(x) = 2\left(\frac{1}{x+1}\cdot 1 - \frac{1}{x}\right) = -\frac{2}{x(x+1)}$$

3. Equació de la recta tangent en un punt

Fes-ho tu. **Troba l'equació de la recta tangent a $f(x) = tg\, x$ en $x = \dfrac{3\pi}{4}$.**

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = tg\,\frac{3\pi}{4} = -1$$

$f'(x) = 1 + tg^2\, x \;\to\; f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = 2$ (pendent de la recta tangent).

L'equació de la recta tangent en $x = \dfrac{3\pi}{4}$ és $y = 2\left(x - \dfrac{3\pi}{4}\right) - 1$; és a dir, $y = 2x - \dfrac{3}{2}\pi - 1$

Pàgina 320

4. Recta tangent paral·lela a una recta

Fes-ho tu. **Troba l'equació de la recta tangent a la corba $f(x) = 3x^2 - 4x$ que sigui paral·lela a la recta $2x - y + 5 = 0$.**

Aïllant y en l'equació de la recta donada, podem obtenir el seu pendent.

$y = 2x + 5 \;\to\;$ El pendent de la recta és 2.

Les abscisses dels punts en què la recta tangent és paral·lela a la recta anterior són les solucions de l'equació $f'(x) = 2$.

$f'(x) = 6x - 4 \;\to\; 6x - 4 = 2 \;\to\; x = 1$ és el punt en què la tangent i la recta donada són paral·leles.

Finalment, com que $f(1) = -1$, la recta buscada és $y = 2(x - 1) - 1$; és a dir, $y = 2x - 3$.

5. Punts de tangent horitzontal

Fes-ho tu. Troba els punts singulars de la funció $f(x) = x^3 - 6x^2$ i digues si són màxims o mínims.

Trobem les abscisses dels punts singulars resolent l'equació $f'(x) = 3x^2 - 12x$:

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 - 12x = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$$

Calculem les ordenades d'aquests punts:

$$f(0) = 0 \qquad f(4) = -32$$

Els punts singulars són (0, 0) i (4, –32).

Branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 6x^2) = +\infty \;\rightarrow\; (4, -32) \text{ és un mínim.}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 6x^2) = -\infty \;\rightarrow\; (0, 0) \text{ és un màxim.}$$

6. Coeficients d'una funció que té punts singulars

Fes-ho tu. Troba b i c de manera que la funció $f(x) = x^3 + bx^2 + c$ passi per $(1, 0)$ i $f'(1) = 5$.

Si f passa per (1, 0), aleshores $f(1) = 0$.

$1^3 + b \cdot 1^2 + c = 0 \;\rightarrow\; c = 0$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

$f'(1) = 5 \;\rightarrow\; 3 \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 5 \;\rightarrow\; b = 1$

Pàgina 321

7. Intervals de creixement i de decreixement

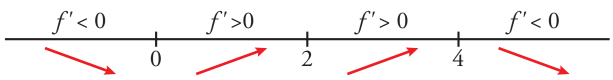
Fes-ho tu. Troba els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x) = \dfrac{x^2}{2 - x}$.

$Dom = \mathbb{R} - \{2\}$

$$f'(x) = \frac{2x(2-x) - x^2(-1)}{(2-x)^2} = \frac{4x - x^2}{(x-2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{4x - x^2}{(x-2)^2} = 0 \;\rightarrow\; 4x - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x_1 = 0,\; x_2 = 4$$

Estudiem els signes de f dins el domini de definició en els intervals els extrems dels quals són els punts singulars.



Per tant, f creix en $(0, 2) \cup (2, 4)$ i decreix en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

8. Problema d'optimització

Fes-ho tu. De tots els rectangles de 36 m de perímetre, troba les dimensions del que té la superfície més gran.

Anomenem b i h la base i l'altura del rectangle, respectivament.

Com que el perímetre és 36, tenim que $2b + 2\text{h} = 36 \;\rightarrow\; \text{h} = 18 - b$

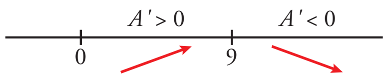
Busquem el rectangle d'àrea màxima:

$$A = bh = b(18 - b)$$

Trobem els punts singulars:

$$A' = 0 \rightarrow A' = 18 - 2b = 0 \rightarrow b = 9$$

Estudiem si el valor obtingut és un màxim:



Per tant, per a $b = 9$ l'àrea és màxima.

Calculem h: $h = 18 - 9 = 9$ i obtenim l'àrea màxima $A = 81\ m^2$.

Pàgina 322

9. Estudi i representació d'una funció polinòmica

Fes-ho tu. Estudia i representa aquesta funció:

$$\boldsymbol{f(x) = 1 + (x - 3)^3}$$

- Pel fet de ser una funció polinòmica, el seu domini és $\mathbb{R}$, és contínua i no té asímptotes.
- Branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} [1 + (x - 3)^3] = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} [1 + (x - 3)^3] = -\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3(x - 3)^2$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3(x - 3)^2 = 0 \rightarrow x = 3$$

Com que $f(3) = 1$, el punt (3, 1) és l'únic punt singular.

- Creixement i decreixement:

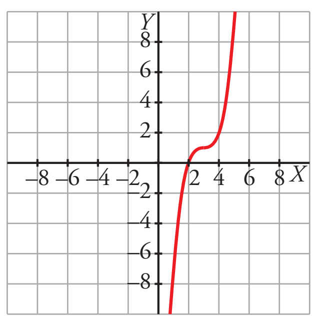
Com que $f'(x) = 3(x - 3)^2 > 0$ per a tot $x \neq 3$, la funció creix a ambdós costats de $x = 3$ i aquest punt no és ni màxim ni mínim.

- Talls amb els eixos:

$$x = 0 \rightarrow y = -26$$

$$y = 0 \rightarrow 1 + (x - 3)^3 = 0 \rightarrow (x - 3)^3 = -1 \rightarrow x = 2$$

- Gràfica:



10. Estudi i representació d'una funció racional

Fes-ho tu. Estudia i representa aquesta funció:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 8}{x}$$

- La funció no està definida en $x = 0 \rightarrow Dom = \mathbb{R} - \{0\}$
- Asímptota vertical: $x = 0$

  Posició:

  Si $x \rightarrow 0^-$, $f(x) \rightarrow -\infty$

  Si $x \rightarrow 0^+$, $f(x) \rightarrow +\infty$

- Asímptotes horitzontals i obliqües:

  Com que el grau del numerador és una unitat més gran que el grau del denominador, té una asímptota obliqua. Dividim:

  $f(x) = 2x + \dfrac{8}{x} \rightarrow$ L'asímptota és $y = 2x$

  Posició:

  Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} < 0$. Corba sota l'asímptota.

  Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - y = \dfrac{8}{x} > 0$. Corba sobre l'asímptota.

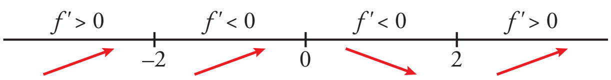
- Punts singulars:

  $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$

  $f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \rightarrow x = -2, \ x = 2$

  $f(-2) = -8$, $f(2) = 8$. Per tant, $(-2, -8)$ i $(2, 8)$ són els punts singulars.

- Creixement i decreixement:



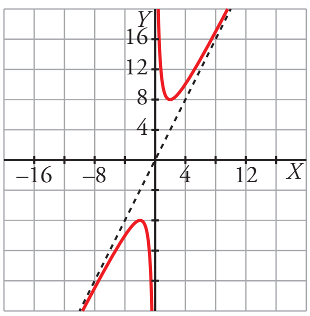
- Talls amb els eixos:

  No talla l'eix OY.

  $y = 0 \rightarrow \dfrac{2x^2 - 8}{x^2} = 0 \rightarrow 2x^2 + 8 = 0$ No té solució (no talla l'eix OX).

- Gràfica:

  $y = \dfrac{2x^2 - 8}{x^2}$



Pàgina 323

11. Funció derivada de funcions definides «a trossos»

Fes-ho tu. Troba la funció derivada de cada una de les funcions següents:

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{4} - 1 & \text{si } x < 4 \\ 2x - 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 3 - x & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$

a) Anomenem $f_1(x) = \dfrac{x^2}{4} - 1$ i $f_2(x) = 2x - 5$

Ambdues funcions són contínues.

$\left.\begin{array}{l} f_1(4) = \dfrac{4^2}{4} - 1 = 3 \\ f_2(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 3 \end{array}\right\}$ Com que totes dues coincideixen, la funció és contínua en $x = 4$.

$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = \dfrac{x}{2} \to f'_1(4) = 2 \\ f'_2(x) = 2 \to f'_2(4) = 2 \end{array}\right\}$ Com que coincideixen, la funció és derivable en $x = 4$ i $f'(4) = 2$.

La funció derivada és $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & \text{si } x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$

b) Anomenem $g_1(x) = 3 - x$ i $g_2(x) = x^2 + 3$

Ambdues funcions són contínues.

$\left.\begin{array}{l} g_1(-1) = 3 - (-1) = 4 \\ g_2(-1) = (-1)^2 + 3 = 4 \end{array}\right\}$ Com que ambdues coincideixen, la funció és contínua en $x = -1$.

$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \to g'_1(-1) = -1 \\ g'_2(x) = 2x \to g'_2(-1) = -2 \end{array}\right\}$ Com que són diferents, la funció no és derivable en $x = -1$.

La funció derivada és $g'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < -1 \\ 2x & \text{si } x > -1 \end{cases}$

Pàgina 324

12. Paràmetres perquè una funció sigui contínua i derivable

Fes-ho tu. Calcula a i b perquè les funcions següents siguin derivables en els punts que s'indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ 4x - b & \text{si } x > 2 \end{cases}$ **en $x = 2$.**

b) $g(x) = \begin{cases} a - x & \text{si } x < -3 \\ x^2 + bx & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$ **en $x = -3$.**

a) Anomenem $f_1(x) = ax^2 + 1$ i $f_2(x) = 4x - b$.

Ambdues funcions són contínues.

Perquè $f(x)$ sigui contínua en $x = 2$, s'ha de complir que $f_1(2) = f_2(2)$.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 4a + 1 \\ f_2(2) = 8 - b \end{array}\right\}$ Per tant: $4a + 1 = 8 - b$

Perquè $f(x)$ sigui derivable en $x = 2$, s'ha de complir que $f'_1(2) = f'_2(2)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(x) = 2ax \rightarrow f'_1(2) = 4a \\ f'_2(x) = 4 \rightarrow f'_2(2) = 4 \end{array}\right\} \text{ Aleshores } 4a = 4$$

Resolem el sistema resultant:

$$\left.\begin{array}{r} 4a + 1 = 8 - b \\ 4a = 4 \end{array}\right\} \rightarrow a = 1,\ b = 3$$

b) Anomenem $g_1(x) = a - x$ i $g_2(x) = x^2 + bx$

Ambdues funcions són contínues.

Perquè $g(x)$ sigui contínua en $x = -3$, s'ha de complir que $g_1(-3) = g_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(-3) = a + 3 \\ g_2(-3) = 9 - 3b \end{array}\right\} \text{ Per tant: } a + 3 = 9 - 3b$$

Perquè $g(x)$ sigui derivable en $x = -3$, s'ha de complir que $g'_1(-3) = g'_2(-3)$.

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(x) = -1 \rightarrow g'_1(-3) = -1 \\ g'_2(x) = 2x + b \rightarrow g'_2(-3) = -6 + b \end{array}\right\} \text{ Aleshores } -1 = -6 + b$$

Resolem el sistema resultant:

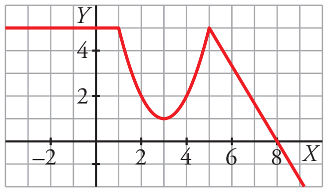
$$\left.\begin{array}{r} a + 3 = 9 - 3b \\ -1 = -6 + b \end{array}\right\} \rightarrow a = -9,\ b = 5$$

Exercicis i problemes guiats

Pàgina 325

1. Derivades sobre la gràfica

Observa la gràfica d'aquesta funció $y = f(x)$:



a) Troba el valor de $f'(-2)$, $f'(3)$, $f'(6)$.

b) Per a quins valors de x és $f'(x) < 0$?

a) $f'(-2) = 0$ perquè és constant en les proximitats de $x = -2$.

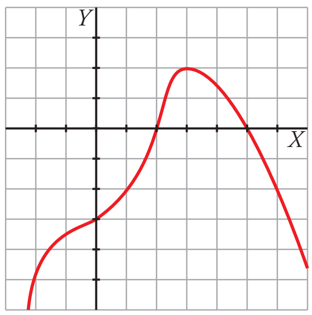
$f'(3) = 0$ perquè en $x = 3$ hi ha un mínim.

$f'(6) = -\frac{5}{3}$ perquè la gràfica és la recta $y = \frac{-5x + 40}{3}$ amb pendent $-\frac{5}{3}$.

b) $f'(x) < 0$ en $(1, 3) \cup (5, +\infty)$ perquè la funció és decreixent en aquests intervals.

2. Funció polinòmica

Representa una funció polinòmica sabent que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty$, que els punts de tangent horitzontal són (0, –3) i (3, 2), i que talla l'eix X només en $x = 2$ i en $x = 5$.



3. Triangle rectangle d'àrea màxima

De tots els triangles rectangles els catets dels quals sumen 12 m, troba les dimensions del que té l'àrea màxima.

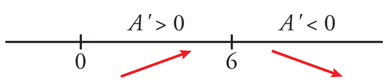
Suposem que a i b són els catets del triangle rectangle: $a + b = 12 \rightarrow b = 12 - a$.

L'àrea del triangle és el semiproducte de la base per l'altura; aleshores:

$$A = \frac{ab}{2} = \frac{a(12 - a)}{2}$$

Per trobar l'àrea màxima, calculem els punts singulars: $A' = 0 \rightarrow A' = 6 - a = 0$.

Vegem si $a = 6$ és un màxim:

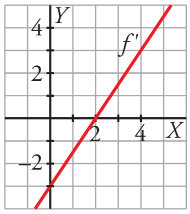


Efectivament, ho és. Per tant, si $a = 6$ i $b = 12 - 6 = 6$, obtenim el triangle rectangle d'àrea màxima.

La hipotenusa és $\sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$.

4. Gràfica de la funció derivada

Aquesta és la gràfica de f', funció derivada de f.



a) Obtenir $f'(0)$, $f'(2)$ i $f'(4)$.

b) Té f algun punt singular?

c) Estudia el creixement i el decreixement de f.

a) $f'(0) = -3$ $\quad f'(2) = 0$ $\quad f'(4) = 3$

b) En $x = 2$ s'anul·la la derivada primera. A més, aquesta és negativa a l'esquerra de 2 i positiva a la dreta. Per tant, la funció passa de decreixent a creixent en $x = 2$ i aquest punt és un mínim.

c) La funció decreix en $(-\infty, 2)$ i creix en $(2, +\infty)$.

5. Regla de la cadena

Si $f(1) = 2$, $f'(1) = -1$, $g(2) = 3$, $g'(2) = 1$, quina és l'equació de la tangent a $y = g[f(x)]$ en $x = 1$?

$g[f(1)] = g(2) = 3$

$D[g[f(1)]] = g'[f(1)] \cdot f'(1) = g'(2) \cdot f'(1) = 1 \cdot (-1) = -1$

L'equació de la recta tangent és $y = -1(x - 1) + 3$; és a dir, $y = -x + 4$.

Exercicis i problemes proposats

Pàgina 326

Per practicar

Taxa de variació mitjana

1 **Troba la taxa de variació mitjana d'aquestes funcions en l'interval [1, 3] i indica si creixen o decreixen en aquest interval:**

a) $f(x) = 1/x$ **b)** $f(x) = (2 - x)^3$ **c)** $f(x) = x^2 - x + 1$ **d)** $f(x) = 2^x$

TVM [1, 3] $= \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \dfrac{f(3) - f(1)}{2}$

a) TVM [1, 3] $= \dfrac{1/3 - 1}{2} = -\dfrac{1}{3} \rightarrow$ Decreix

b) TVM [1, 3] $= \dfrac{-1 - 1}{2} = -1 \rightarrow$ Decreix

c) TVM [1, 3] $= \dfrac{7 - 1}{2} = 3 \rightarrow$ Creix

d) TVM [1, 3] $= \dfrac{8 - 2}{2} = 3 \rightarrow$ Creix

2 **a) Troba la TVM de les funcions $f(x) = -x^2 + 5x - 3$ i $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en l'interval [1, 1 + h].**

b) Calcula la TVM d'aquestes funcions en l'interval [1; 1,5] fent servir les expressions obtingudes en l'apartat anterior.

a) Per a la funció $f(x)$:

TVM [1, 1 + h] $= \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dfrac{-(1+h)^2 + 5(1+h) - 3 - 1}{h} = \dfrac{-1 - 2h - h^2 + 5 + 5h - 4}{h} = 3 - h$

Per a la funció $g(x)$:

TVM [1, 1 + h] $= \dfrac{g(1+h) - g(1)}{h} = \dfrac{\dfrac{1}{1+h+1} - \dfrac{1}{2}}{h} = \dfrac{\dfrac{2 - h - 2}{2(2+h)}}{h} = \dfrac{-1}{2h+4}$

b) Per a la funció $f(x)$:

TVM [1; 1,5] = 3 – 0,5 = 2,5

Per a la funció $g(x)$:

TVM [1; 1,5] $= \dfrac{-1}{2 \cdot 0,5 + 4} = \dfrac{-1}{5}$

3 **Compara la TVM de les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = 3^x$ en els intervals [2, 3] i [3, 4], i digues quina de les dues creix més en cada interval.**

Per a $f(x)$: TVM [2, 3] = 19

TVM [3, 4] = 37

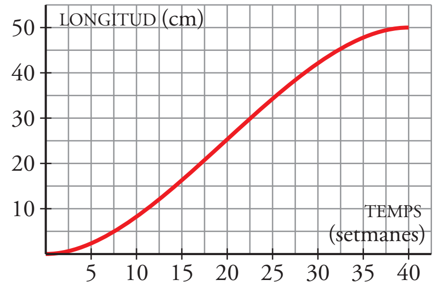
Per a $g(x)$: TVM [2, 3] = 18

TVM [3, 4] = 54

En [2, 3] creix més $f(x)$.

En [3, 4] creix més $g(x)$.

4 **Aquesta gràfica mostra la longitud d'un fetus durant l'embaràs. Estudia el creixement mitjà en els intervals [5, 15] i [20, 30] i digues en quin període és més gran el creixement:**



$$\text{TVM }[5,\,15] = \frac{f(15)-f(5)}{10} = \frac{17-2}{10} = 1{,}5 \text{ cm/setmana}$$

$$\text{TVM }[20,\,30] = \frac{f(30)-f(20)}{10} = \frac{42-25}{10} = 1{,}7 \text{ cm/setmana}$$

El creixement mitjà és més gran entre les setmanes 20 i 30.

Definició de derivada

5 **Troba la derivada de les funcions següents en $x = 1$, fent servir la definició de derivada:**

a) $f(x) = 3x^2 - 1$

b) $f(x) = (2x + 1)^2$

c) $f(x) = 3/x$

d) $f(x) = 1/(x + 2)^2$

a) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h)^2-1-2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3(1+h^2+2h)-3}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{3+3h^2+6h-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(3h+6)}{h} = 6$$

b) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2(1+h)+1)^2-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(2h+3)^2-9}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{4h^2+9+12h-9}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(4h+12)}{h} = 12$$

c) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3/(1+h)-3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3-3-3h}{h(1+h)} = -3$$

d) $$f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{1}{(1+h+2)^2}-\dfrac{1}{9}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{9-h^2-6h-9}{9(h+3)^2}}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{-h^2-6h}{9h(h+3)^2} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-6}{9(h+3)^2} = \frac{-2}{27}$$

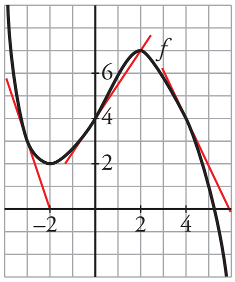
6 **Aplica la definició de derivada per trobar el pendent de la tangent en $x = 2$ de les corbes $f(x) = 4x - x^2$ i $g(x) = \dfrac{1}{3x-7}$.**

- $$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{4(2+h)-(2+h)^2-4}{h} = \frac{8+4h-4-4h-h^2-4}{h} = -h$$

$$f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}(-h) = 0$$

- $$\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3(2+h)-7}-(-1)}{h} = \frac{\dfrac{1}{3h-1}+1}{h} = \frac{3}{3h-1}$$

$$g'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{g(2+h)-g(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{3}{3h-1} = -3$$

7 

Observa la gràfica de f en la qual s'han traçat les tangents en $x = -3$, $x = 0$ i $x = 4$ i respon.

a) Quin és el valor de $f'(-3)$, $f'(0)$ i $f'(4)$?

b) En quins punts és $f'(x) = 0$?

c) En $x = 1$, la derivada és positiva o negativa? I en $x = 3$?

a) $f'(-3) = -3 \qquad f'(0) = \dfrac{3}{2} \qquad f'(4) = -2$

b) En $x = -2$ i $x = 2$.

c) En $x = 1$ la derivada és positiva perquè el pendent de la tangent ho és.
Anàlogament, la derivada en $x = 3$ és negativa.

8 Troba la funció derivada de les funcions següents, aplicant-hi la definició:

a) $f(x) = \dfrac{(5x-3)}{2}$

b) $f(x) = x^2 + 7x - 1$

c) $f(x) = x^3 - 5x$

d) $f(x) = \dfrac{x-1}{x}$

a) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{5(x+h)-3}{2} - \dfrac{5x-3}{2}}{h} = \frac{5x+5h-3-5x+3}{2h} = \frac{5}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$$

b) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2+7(x+h)-1-(x^2+7x-1)}{h} =$$

$$= \frac{x^2+2hx+h^2+7x+7h-1-x^2-7x+1}{h} = 2x + h + 7$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (2x + h + 7) = 2x + 7$$

c) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^3-5(x+h)-(x^3-5x)}{h} =$$

$$= \frac{x^3+3hx^2+3h^2x+h^3-5x-5h-x^3+5x}{h} = 3x^2 + 3hx + h^2 - 5$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} (3x^2 + 3hx + h^2 - 5) = 3x^2 - 5$$

d) $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\dfrac{x+h-1}{x+h} - \dfrac{x-1}{x}}{h} = \frac{x(x+h-1)-(x+h)(x-1)}{hx(x+h)} =$$

$$= \frac{x^2+hx-x-(x^2-x+hx-h)}{hx(x+h)} = \frac{1}{x(h+x)}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{x(h+x)} = \frac{1}{x^2}$$

Regles de derivació

9 **Troba la funció derivada de les funcions següents:**

a) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 7x^2 - 4x$

b) $f(x) = 3\cos(2x + \pi)$

c) $f(x) = \dfrac{1}{3x} + \sqrt{x}$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

e) $f(x) = \dfrac{1}{7x+1} + \dfrac{\sqrt{2x}}{3}$

f) $f(x) = x \sin \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = \ln 3x + e^{-x}$

i) $f(x) = \dfrac{tg\, x}{2}$

j) $f(x) = \sqrt{3}\, arc \sin 2x$

a) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot 3x^2 + 7 \cdot 2x - 4 = x^2 + 14x - 4$

b) $f(x) = -3\cos 2x$

$f'(x) = -3(-\sin 2x) \cdot 2 = 6 \sin 2x$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{-1}{x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = -\dfrac{1}{3x^2} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = \dfrac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$

e) Tenint en compte que $\dfrac{\sqrt{2x}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}\sqrt{x}$:

$f'(x) = \dfrac{0 \cdot (7x+1) - 1 \cdot 7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{3} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{-7}{(7x+1)^2} + \dfrac{\sqrt{2}}{6\sqrt{x}}$

f) $f'(x) = 1 \cdot \sin \dfrac{x}{2} + x \cdot \cos \dfrac{x}{2} \cdot \dfrac{1}{2} = \sin \dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}$

g) $f(x) = (x-4)^{-1/2}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{2}(x-4)^{-3/2} = -\dfrac{1}{2(x-4)\sqrt{x-4}}$

h) $f(x) = \ln 3 + \ln x + e^{-x}$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} + e^{-x}(-1) = \dfrac{1}{x} - e^{-x}$

i) $f'(x) = \dfrac{1 + tg^2\, x}{2}$ o també $f'(x) = \dfrac{1}{2\cos^2 x}$

j) $f'(x) = \sqrt{3}\dfrac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{1-4x^2}}$

10 **Aplica les regles de derivació i simplifica si és possible.**

a) $f(x) = (5x-2)^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3x} + \frac{x}{3}\right)^4$

c) $f(x) = \sqrt[3]{(6-x)^2}$

d) $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}$

f) $f(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^3 \cdot e^{2x+1}$

g) $f(x) = x^3 \cos^2 3x$

h) $f(x) = tg^3\, x^2$

i) $f(x) = \sqrt{7 \cdot \ln x}$

j) $f(x) = arc\, tg\, \frac{x^2}{3}$

a) $f'(x) = 3(5x-2)^2 \cdot 5 = 15(5x-2)^2$

b) $f(x) = \frac{1}{81}\left(\frac{1}{x} + x\right)^4$

$$f'(x) = \frac{4}{81}\left(\frac{1}{x} + x\right)^3 \left(-\frac{1}{x^2} + 1\right) = \frac{4}{81}\left(\frac{1+x^2}{x}\right)^3 \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = \frac{4}{81}\,\frac{(x^4-1)(x^2+1)^2}{x^5}$$

c) $f(x) = (6-x)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}(6-x)^{-1/3}(-1) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{6-x}} = -\frac{2}{3\sqrt[3]{6-x}}$$

d) $f(x) = \frac{e^x(1+e^{-2x})}{e^x} = 1 + e^{-2x}$

$$f'(x) = e^{-2x}\cdot(-2) = -2e^{-2x}$$

e) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{x^3}{x^2-4}}} \cdot \frac{3x^2(x^2-4) - x^3\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x^3}}\,\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2x}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\,\frac{x(x^3-12x)}{(x^2-4)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2-4}{x}}\cdot\frac{x^3-12x}{(x^2-4)^2}$$

f) $$f'(x) = \frac{3x^2}{8}e^{2x+1} + \frac{x^3}{8}e^{2x+1}\cdot 2 = \frac{e^{2x+1}}{8}(2x^3+3x^2)$$

g) $$f'(x) = 3x^2\cos^2 3x + x^3\cdot 2\cos 3x\cdot(-\sin 3x)\cdot 3 = 3x^2[\cos^2 3x - 2x\cos 3x \sin 3x] = 3x^2[\cos^2 3x - x\sin 6x]$$

h) $$f'(x) = 3tg^2\, x^2\cdot(1+tg^2\, x^2)\cdot 2x = 6x\, tg^2\, x^2\cdot(1+tg^2\, x^2)$$

i) $f(x) = \sqrt{7}\sqrt{\ln x}$

$$f'(x) = \sqrt{7}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\ln x}}\cdot\frac{1}{x} = \frac{\sqrt{7}}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\cdot\frac{1}{3} = \frac{9}{x^2+9}\cdot\frac{1}{3} = \frac{3}{x^2+9}$$

11 Deriva les funcions següents:

a) $f(x) = \sqrt{arc\ cos\ e^x}$

b) $f(x) = log\ (sin\ x^2)$

c) $f(x) = sin^2\ x + e^{cos\ x}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x}}{2^{x-1}}$

e) $f(x) = e^{sin\ x} \cdot ln\ tg\ x$

f) $f(x) = 3\ cos\ (ln\ x)$

g) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$

h) $f(x) = arc\ tg\ \dfrac{1-x}{1+x}$

i) $f(x) = 7^{\sqrt{x}} + \dfrac{cos\ x}{x^2}$

j) $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

a) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot e^x = \frac{-e^x}{2\sqrt{arc\ cos\ e^x\ (1-e^{2x})}}$$

b) $$f(x) = ln\sqrt{\frac{x}{x^2+1}} = ln\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\ ln\ \frac{x}{x^2+1}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\ \frac{1}{\dfrac{x}{x^2+1}} \cdot \frac{1\,(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ \frac{x^2+1}{x}\ \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{2x(x^2+1)}$$

c) $$f'(x) = 2sin\ x\ cos\ x + e^{cos\ x}\ (-sin\ x) = sin\ 2x - sin\ x \cdot e^{cos\ x}$$

d) $$f(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{x^{1/4}}{2^{x-1}}$$

$$f'(x) = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4} \cdot x^{-3/4} \cdot 2^{x-1} - x^{1/4} \cdot 2^{x-1} \cdot ln\ 2 \cdot 1}{(2^{x-1})^2} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{\dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - ln\ 2\sqrt[4]{x}}{2^{x-1}} = \sqrt[4]{2} \cdot \frac{1 - 4x\ ln\ 2}{2^{x+1} \cdot \sqrt[4]{x^3}}$$

e) $$f'(x) = e^{sin\ x} \cdot cos\ x \cdot ln\ tg\ x + e^{sin\ x} \cdot \frac{1}{tg\ x} \cdot \frac{1}{cos^2\ x} = e^{sin\ x}\left(cos\ x \cdot ln\ tg\ x + \frac{1}{sin\ x\ cos\ x}\right)$$

f) $$f'(x) = 3\,[-sin\,(ln\ x)] \cdot \frac{1}{x} = \frac{-3\ sin\,(ln\ x)}{x}$$

g) $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x}}$$

h) $$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2}\ \frac{-1\,(1+x)-(1-x)\,1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2+(1-x)^2}\ \frac{-2}{(x+1)^2} = \frac{-2}{2+2x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

i) $$f'(x) = 7^{\sqrt{x}} \cdot ln\ 7 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{-sin\ x \cdot x^2 - cos\ x \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{ln\ 7 \cdot 7^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} - \frac{x\ sin\ x + 2\ cos\ x}{x^3}$$

j) $$f(x) = \frac{e^x\,(1-e^{-2x})}{e^x\,(1+e^{-2x})} = \frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

$$f'(x) = \frac{-e^{-2x}\,(-2)\,(1+e^{-2x}) - (1-e^{-2x})\,e^{-2x}\,(-2)}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{2e^{-2x}\,(1+e^{-2x}) + 2e^{-2x}\,(1-e^{-2x})}{(1+e^{-2x})^2} = \frac{4e^{-2x}}{(1+e^{-2x})^2}$$

12 **Aplica les propietats dels logaritmes, abans d'aplicar les regles de derivació, per obtenir la derivada d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = ln\,\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **b)** $f(x) = ln\,\sqrt{\dfrac{x}{x^2+1}}$ **c)** $f(x) = ln\,(x \cdot e^{-x})$

d) $f(x) = log\,\dfrac{(3x-5)^3}{x}$ **e)** $f(x) = log\,(tg\,x)^2$ **f)** $f(x) = log\,\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$

a) $f(x) = ln\,(x^2+1) - ln\,(x^2-1)$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \frac{-4x}{x^4-1}$$

b) $f(x) = \dfrac{1}{2}[ln\,x - ln\,(x^2+1)]$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x}\right] = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

c) $f(x) = ln\,x + ln\,e^{-x} = ln\,x - x$

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

d) $f(x) = 3\,log\,(3x-5) - log\,x$

$$f'(x) = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{ln\,10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{1}{ln\,10}\left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x}\right] =$$

$$= \frac{1}{ln\,10} \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{ln\,10\,(3x^2-5x)}$$

e) $f(x) = 2\,log\,(tg\,x)$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{1+tg^2\,x}{tg\,x} \cdot \frac{1}{ln\,10} = \frac{2\,(1+tg^2\,x)}{tg\,x \cdot ln\,10}$$

f) $f(x) = x\,ln\,x$

$$f'(x) = ln\,x + x \cdot \frac{1}{x} = ln\,x + 1$$

Pàgina 327

Recta tangent i recta normal

13 **Troba l'equació de la recta tangent i de la recta normal a la funció f en el punt d'abscissa indicat en cada cas.**

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ **en** $x = 2$ **b)** $f(x) = \sqrt{x+1}$ **en** $x = 3$

c) $f(x) = \dfrac{2-x}{x^3}$ **en** $x = -1$ **d)** $f(x) = ln\,x$ **en** $x = e^2$

e) $f(x) = sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ **en** $x = \dfrac{\pi}{3}$

a) $f'(x) = 2x - 5$

$f(2) = 0$

$f'(2) = -1$

La recta tangent és $y = -1(x-2) + 0$; és a dir, $y = -x + 2$

La recta normal és $y = \dfrac{-1}{-1}(x-2) + 0$; és a dir, $y = x - 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$

$f(3) = 2$

$f'(3) = \dfrac{1}{4}$

La recta tangent és $y = \dfrac{1}{4}(x-3) + 2$; és a dir, $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{5}{4}$

La recta normal és $y = \dfrac{-1}{1/4}(x-3) + 2$; és a dir, $y = -4x + 14$

c) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot x^3 - (2-x) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \dfrac{2x-6}{x^4}$

$f(-1) = -3$

$f'(-1) = -8$

La recta tangent és $y = -8(x+1) - 3$; és a dir, $y = -8x - 11$

La recta normal és $y = \dfrac{-1}{-8}(x+1) - 3$; és a dir, $y = \dfrac{1}{8}x - \dfrac{23}{8}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f(e^2) = 2$

$f'(e^2) = \dfrac{1}{e^2}$

La recta tangent és $y = \dfrac{1}{e^2}(x - e^2) + 2$; és a dir, $y = \dfrac{1}{e^2}x + 1$

La recta normal és $y = \dfrac{-1}{1/e^2}(x - e^2) + 2$; és a dir, $y = -e^2x + e^4 - 2$

e) $f'(x) = cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$

$f\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

La recta tangent és $y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

La recta normal és $y = \dfrac{-1}{-\sqrt{3}/2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$; és a dir, $y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) + \dfrac{1}{2}$

14 **Troba els punts en què el pendent de la recta tangent a cada una de les funcions següents és igual a 2:**

a) $y = x^2 - 2x$

b) $y = \dfrac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$

d) $y = ln\,(4x-1)$

a) $f'(x) = 2x - 2$

$f'(x) = 2 \rightarrow 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$

b) $f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+2) - x \cdot 1}{(x+2)^2} = \dfrac{2}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow (x+2)^2 = 1 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = -3$

c) $f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+3}}$

$f'(x) = 2 \;\rightarrow\; \dfrac{2}{\sqrt{x+3}} = 2 \;\rightarrow\; \sqrt{x+3} = 1 \;\rightarrow\; x = -2$

d) $f'(x) = \dfrac{4}{4x-1}$

$f'(x) = 2 \;\rightarrow\; \dfrac{4}{4x-1} = 2 \;\rightarrow\; 4x - 1 = 2 \;\rightarrow\; x = \dfrac{3}{4}$

15 **Escriu, en cada cas, l'equació de la recta tangent a f que sigui paral·lela a la recta donada.**

a) $f(x) = x^2 + 4x + 1$ **paral·lela a** $2x + y + 1 = 0$

b) $f(x) = x^3 - 3x$ **paral·lela a** $y = 6x + 10$

c) $f(x) = \dfrac{x-3}{x+2}$ **paral·lela a** $5x - y = 0$

a) $2x + y + 1 = 0 \;\rightarrow\; y = -2x - 1$

Per tant, la recta tangent ha de tenir pendent –2 perquè sigui paral·lela.

$f'(x) = 2x + 4$

$f'(x) = -2 \;\rightarrow\; 2x + 4 = -2 \;\rightarrow\; x = -3$

$f(-3) = -2$ i la recta tangent és $y = -2(x + 3) - 2$.

b) La recta tangent ha de tenir pendent 6 perquè sigui paral·lela.

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 6 \;\rightarrow\; 3x^2 - 3 = 6 \;\rightarrow\; x_1 = -\sqrt{3},\; x_2 = \sqrt{3}$

Si $x = -\sqrt{3} \;\rightarrow\; f(-\sqrt{3}) = 0$

La recta tangent en $x = -\sqrt{3}$ és $y = 6(x + \sqrt{3})$

Si $x = \sqrt{3} \;\rightarrow\; f(\sqrt{3}) = 0$

La recta tangent en $x = \sqrt{3}$ és $y = 6(x - \sqrt{3})$

c) $5x - y = 0 \;\rightarrow\; y = 5x$

Per tant, la recta tangent ha de tenir pendent 5 perquè sigui paral·lela.

$f'(x) = \dfrac{(x+2)-(x-3)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$

$f'(x) = 5 \;\rightarrow\; \dfrac{5}{(x+2)^2} = 5 \;\rightarrow\; (x+2)^2 = 1 \;\rightarrow\; x_1 = -1,\; x_2 = -3$

Si $x = -1 \;\rightarrow\; f(-1) = -4$

La recta tangent en $x = -1$ és $y = 5(x + 1) - 4$

Si $x = -3 \;\rightarrow\; f(-3) = 6$

La recta tangent en $x = -3$ és $y = 5(x + 3) + 6$

16 **Escriu les equacions de les rectes tangents i de les rectes normals a la funció $y = 4 - x^2$ en els punts de tall amb l'eix d'abscisses.**

Els punts de tall amb l'eix d'abscisses s'obtenen fent $y = 0$.

$y = 0 \;\rightarrow\; 4 - x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = -2,\; x = 2$

$f'(x) = -2x$

Si $x = -2 \;\rightarrow\; f'(-2) = 4$. La recta tangent en $x = -2$ és $y = 4(x + 2)$

Si $x = 2 \;\rightarrow\; f'(2) = -4$. La recta tangent en $x = 2$ és $y = -4(x - 2)$

Les rectes normals són: en $x = -2$, $y = -\dfrac{1}{4}(x + 2)$ i en $x = 2$, $y = \dfrac{1}{4}(x - 2)$

17 **Obtén els punts on la recta tangent és horitzontal i escriu l'equació.**

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$

b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$

d) $y = x^3 - 12x$

e) $y = \dfrac{x^2+1}{x}$

f) $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$

Els punts on la recta tangent és horitzontal són aquells en què $f'(x) = 0$.

a) $f'(x) = 6x - 2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3}$

$f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \dfrac{1}{3} + 5 = \dfrac{14}{3}$

L'equació de la recta tangent és $y = \dfrac{14}{3}$

b) $f'(x) = 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 1$

$f(0) = 0 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

$f(1) = 0 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 1$ és $y = 0$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 3$

$f(0) = 0 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

$f(3) = -27 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 3$ és $y = -27$.

d) $f'(x) = 3x^2 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = 16 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = -2$ és $y = 16$.

$f(2) = -16 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 2$ és $y = -16$.

e) $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f(-1) = 1 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = -1$ és $y = -2$.

$f(1) = 1 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 1$ és $y = 2$.

f) $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0 \rightarrow$ L'equació de la recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

Punts singulars. Creixement i decreixement

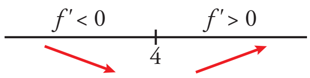
18 **Troba, en cada cas, els punts singulars de la funció i determina'n els intervals de creixement i de decreixement.**

a) $f(x) = x^2 - 8x + 3$ **b)** $f(x) = 12x - 3x^2$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 3x^2$

d) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$

a) $f'(x) = 2x - 8$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 2x - 8 = 0 \;\rightarrow\; x = 4$

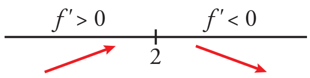


Com que $f(4) = -5$, el punt $(4, -5)$ és un punt singular.

Interval de creixement $(4, +\infty)$. Interval de decreixement $(-\infty, 4)$.

b) $f'(x) = 12 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 12 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 2$



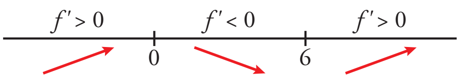
Com que $f(2) = 12$, el punt $(2, 12)$ és un punt singular.

Interval de creixement $(-\infty, 2)$. Interval de decreixement $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - 6x = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 6$

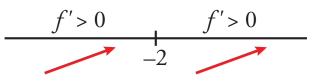
Com que $f(0) = 0$ i $f(6) = -36$, els punts $(0, 0)$ i $(6, -36)$ són punts singulars.



Intervals de creixement $(-\infty, 0) \cup (6, +\infty)$. Interval de decreixement $(0, 6)$.

d) $f'(x) = 3x^2 + 12x + 12$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; 3x^2 + 12x + 12 = 0 \;\rightarrow\; x = -2$



Com que $f(-2) = -8$, el punt $(-2, -8)$ és un punt singular.

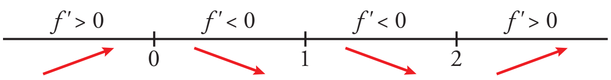
Interval de creixement $\mathbb{R}$.

e) $Dom = \mathbb{R} - \{1\}$

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$$

Com que $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$, els punts $(0, 0)$ i $(2, 4)$ són punts singulars.



Intervals de creixement $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$. Intervals de decreixement $(0, 1) \cup (1, 2)$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{-2\}$

$$f'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

No té punts singulars. Com que $f'(x) > 0$ sempre que $x \neq -2$ i la funció no estigui definida en $x = -2$, els intervals de creixements són $(-\infty, -2) \cup (-2, +\infty)$.

19 **Comprova que les funcions següents no tenen punts singulars i determina els intervals on creixen o decreixen:**

a) $y = x^3 + 3x$ **b)** $y = \dfrac{1}{x}$ **c)** $y = \sqrt{x}$ **d)** $y = \ln x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 3$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 3 = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$, la funció és creixent en tot $\mathbb{R}$.

b) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow -\dfrac{1}{x^2} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) < 0$ sempre que $x \neq 0$ i no està definida en $x = 0$, els intervals de decreixement són $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

c) $Dom = [0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$, l'interval de creixement és $[0, +\infty)$.

d) $Dom = (0, +\infty)$

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1}{x} = 0$ no té solució. Per tant, no té punts singulars.

Com que $f'(x) > 0$ en el seu domini de definició, l'interval de creixement és $(0, +\infty)$.

20 **Troba els punts singulars de les funcions següents i, amb l'ajuda de les branques infinites, determina si són màxims o mínims:**

a) $y = x^3 - 2x^2 + x + 2$ **b)** $y = 3x^2 - x^3$

c) $y = x^4 - 8x^2 + 10$ **d)** $y = -3x^4 - 12x$

e) $y = \dfrac{3}{x^2+1}$ **f)** $y = \dfrac{x^3+4}{x}$

a) $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1}{3},\ x = 1$

Com que $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{58}{27}$ i $f(1) = 2$, els punts $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$ i $(1, 2)$ són punts singulars.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \end{array}\right\}$$ Per tant $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{58}{27}\right)$, és un màxim i $(1, 2)$ és un mínim.

b) $f'(x) = 6x - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 6x - 3x^2 = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Com que $f(0) = 0$ i $f(2) = 4$, els punts $(0, 0)$ i $(2, 4)$ són punts singulars.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \end{array}\right\}$$ Per tant, $(0, 0)$ és un mínim i $(2, 4)$ és un màxim.

c) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 - 16x = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 0,\ x = 2$

Com que $f(-2) = -6$, $f(0) = 10$ i $f(2) = -6$, els punts $(-2, -6)$, $(0, 10)$ i $(2, -6)$ són punts singulars.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ Per tant, } (-2, -6) \text{ i } (2, -6) \text{ són mínims.}$$

El punt $(0, 10)$ ha de ser un màxim perquè és entre dos mínims.

d) $f'(x) = -12x^3 - 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow -12x^3 - 12 = 0 \rightarrow x = -1$

Com que $f(-1) = 9$, el punt $(-1, 9)$ és un punt singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty\end{array}\right\} \text{ Per tant, } (-1, 9) \text{ és un màxim.}$$

e) $f'(x) = \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{-6x}{(x^2+1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

Com que $f(0) = 3$, el punt $(0, 3)$ és un punt singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0\end{array}\right\} \text{ Per tant, } (0, 3) \text{ és un màxim.}$$

f) $Dom = \mathbb{R} - \{0\}$

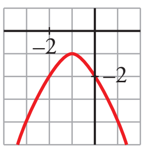
$f'(x) = 2x - \dfrac{4}{x^2}$

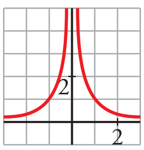
$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \rightarrow x = \sqrt[3]{2}$

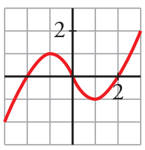
Com que $f\left(\sqrt[3]{2}\right) = 3\sqrt[3]{4}$, el punt $\left(\sqrt[3]{2},\ 3\sqrt[3]{4}\right)$ és un punt singular.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty\end{array}\right\} \text{ Per tant, } \left(\sqrt[3]{2},\ 3\sqrt[3]{4}\right) \text{ és un mínim.}$$

21 **Indica, en cada una d'aquestes funcions, els valors de x en els quals f' és positiva i en els quals f' és negativa:**

a) 

b) 

c) 

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

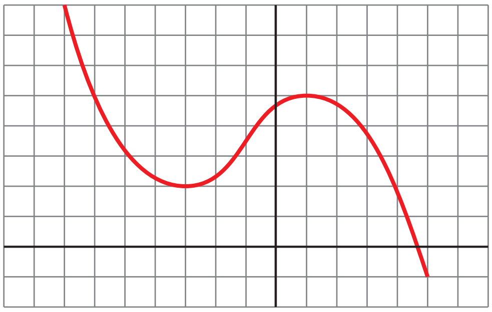
$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

Gràfiques de funcions polinòmiques i racionals

22 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual sabem que:**

- **és contínua.**
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- **els punts de tangent horitzontal són (–3, 2) i (1, 5).**

Després indica si els punts de tangent horitzontal són màxims o mínims.



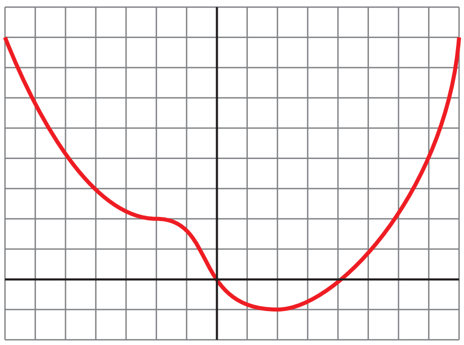
(–3, 2) és un mínim.

(1, 5) és un màxim.

23 **D'una funció polinòmica sabem que:**

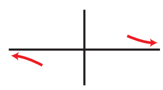
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- **la seva derivada és igual a 0 només en (–2, 2) i en (2, –1).**
- **talla els eixos només en (0, 0) i en (4, 0).**

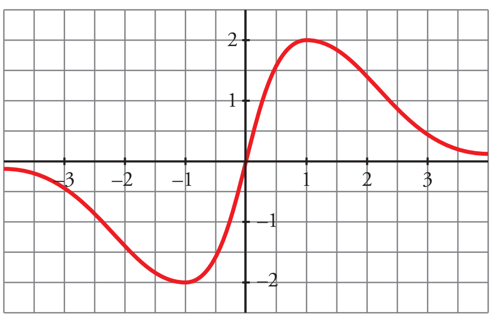
Representa-la gràficament.



24 **Representa una funció contínua $y = f(x)$ de la qual sabem que:**

- **els punts de tangent horitzontal són (–1, –2) i (1, 2).**
- **les branques infinites són així:**





25 **Comprova que la funció $y = (x-1)^3$ passa pels punts (0, –1), (1, 0) i (2, 1).**
La seva derivada s'anul·la en el punt (1, 0); pot ser un màxim o un mínim aquest punt?

$f'(x) = 3(x-1)^2$: $f(0) = -1 \rightarrow$ passa per $(0, -1)$

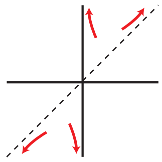
$f(1) = 0 \rightarrow$ passa per $(1, 0)$

$f(2) = 1 \rightarrow$ passa per $(2, 1)$

$f'(1) = 0$

El punt (1, 0) no és ni màxim ni mínim.

26 **Comprova que la funció $y = \dfrac{x^2+1}{x}$ té dos punts de tangent horitzontal, (–1, –2) i (1, 2); les asímptotes són $x = 0$ i $y = x$ i la posició de la corba respecte de les asímptotes és la que s'indica en la il·lustració. Després, representa-la.**



$f(x) = x + \dfrac{1}{x}$

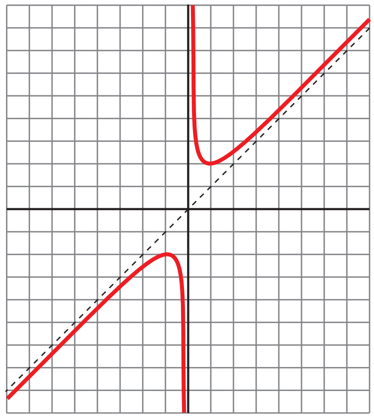
$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

Punts (–1, –2) i (1, 2).

$\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty;\quad \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

Asímptota vertical en $x = 0$.

Asímptota obliqua en $y = x$.

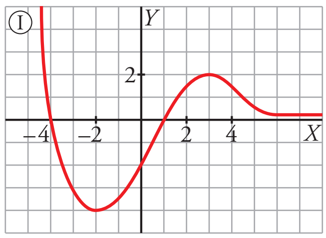


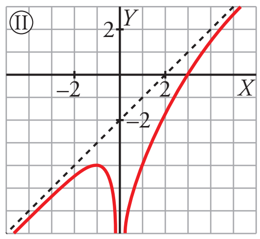
Pàgina 328

27 **Observa aquestes gràfiques i descriu en cada cas:**

a) Les branques infinites, asímptotes i posició de la corba respecte a aquestes.

b) Els punts singulars i els intervals on creix i decreix.





a) • Funció I

Té una branca parabòlica quan $x \rightarrow -\infty$.

La recta $y = 0$ és una asímptota horitzontal quan $x \rightarrow +\infty$ i la funció queda per sobre de l'asímptota.

• Funció II

La recta $y = x - 2$ és una asímptota obliqua quan $x \rightarrow -\infty$ i quan $x \rightarrow +\infty$. En ambdós casos, la funció queda per sota l'asímptota.

La recta $x = 0$ és una asímptota vertical i la funció tendeix a $-\infty$ pels dos costats.

b) • Funció I

El punt $(-2, -4)$ és un mínim. El punt $(3, 2)$ és un màxim.

Hi ha un altre punt singular, $(0{,}5; -1)$, però no és ni màxim ni mínim.

• Funció II

Només té un punt singular, el màxim $(-1, -4)$.

28 **Donada la funció $y = \dfrac{2x^2}{x^2+1}$, comprova que:**

- **té derivada nul·la en (0, 0).**
- **la recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal.**
- **la posició de la corba respecte de l'asímptota és:**

  Si $x \to -\infty$, $y < 2$

  Si $x \to +\infty$, $y < 2$

Representa-la.

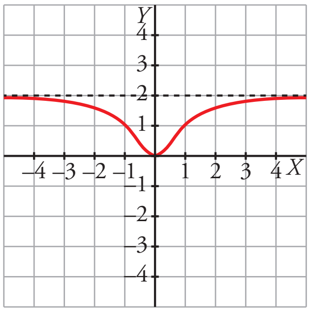
- $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

  $\left.\begin{array}{l} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{array}\right\} \to$ La derivada en (0, 0) és nul·la.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^2}{1+x^2} = 2 \to$ La recta $y = 2$ és una asímptota horitzontal.

- $f(x) - 2 = \dfrac{2x^2}{1+x^2} - 2 = -\dfrac{2}{x^2+1}$

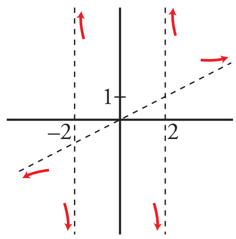
  Com que la diferència sempre és negativa, la funció queda per sota de l'asímptota $y = 2$.

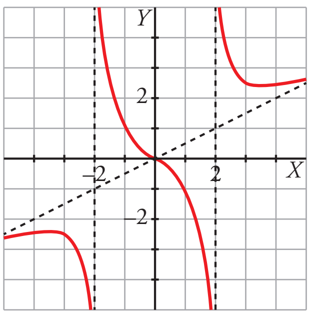


29 **Completa la gràfica d'una funció de la qual sabem que té tres punts singulars:**

$$\left(-3, \frac{-5}{2}\right),\ (0, 0),\ \left(3, \frac{5}{2}\right)$$

Les seves branques infinites són representades a la dreta.





30 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual coneixem:**

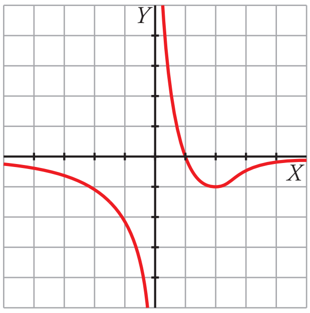
- **Domini de definició: $\mathbb{R} - \{0\}$**
- **Talla l'eix X en $x = 1$.**
- **Asímptota horitzontal: $y = 0$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < 0$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) < 0$
- **Asímptota vertical: $x = 0$**

  Si $x \to 0^+$, $f(x) \to +\infty$

  Si $x \to 0^-$, $f(x) \to -\infty$
- **Mínim en $(2, -1)$.**



31 **Representa $y = f(x)$ de la qual coneixem:**

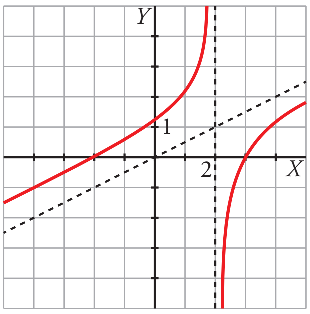
- **Asímptota vertical: $x = 2$**

  Si $x \to 2^+$, $f(x) \to -\infty$

  Si $x \to 2^-$, $f(x) \to +\infty$
- **Asímptota obliqua: $y = x/2$**

  Si $x \to +\infty$, $f(x) < x/2$

  Si $x \to -\infty$, $f(x) > x/2$
- **Talls amb els eixos: $(0, 1)$, $(-2, 0)$, $(3, 0)$**



Per resoldre

32 **a) Troba el vèrtex de la parábola $y = x^2 + 6x + 11$ tenint en compte que en aquest punt, la tangent és horitzontal.**

b) Troba les coordenades del vèrtex d'una paràbola qualsevol $y = ax^2 + bx + c$.

a) $f'(x) = 2x + 6 = 0 \to x = -3$

Punt $(-3, 2)$.

b) $f'(x) = 2ax + b$

$f'(x) = 0 \to 2ax + b = 0 \to x = \dfrac{-b}{2a}$ és l'abscissa del vèrtex.

$f\left(\dfrac{-b}{2a}\right) = a\left(\dfrac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\dfrac{-b}{2a}\right) + c = \dfrac{-b^2 + 4ac}{4a}$ és l'ordenada del vèrtex.

33 **Determina la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que és tangent a la recta $y = 2x - 3$ en el punt $A(2, 1)$ i que passa pel punt $B(5, -2)$.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=1 \rightarrow 4a+2b+c=1 \\ f'(2)=2 \rightarrow 4a+b=2 \\ f(5)=-2 \rightarrow 25a+5b+c=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=-1 \\ b=6 \\ c=-7 \end{array}$$

La funció és $f(x) = -x^2 + 6x - 7$.

34 **Troba el valor de x per al qual les tangents a les corbes $y = 3x^2 - 2x + 5$ i $y = x^2 + 6x$ siguin paral·leles i escriu les equacions d'aquestes tangents.**

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=3x^2-2x+5 \rightarrow f'(x)=6x-2 \\ g(x)=x^2+6x \rightarrow g'(x)=2x+6 \end{array}\right\} 6x-2=2x+6 \rightarrow x=2$$

Per a $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$, la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10(x - 2) + 13 \rightarrow y = 10x - 7$

Per a $g(x) = x^2 + 6x$, la tangent en $x = 2$ és:

$y = 10(x - 2) + 16 \rightarrow y = 10x - 4$

35 **Troba a, b i c en $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ de manera que la gràfica de f tingui tangent horitzontal en $x = -4$ i en $x = 0$, i que passi per $(1, 1)$.**

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f'(-4)=0 \rightarrow 48-8a+b=0 \\ f'(0)=2 \rightarrow b=\ \ 0 \\ f(1)=1 \rightarrow 1+a+b+c=1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=6 \\ b=6 \\ c=-6 \end{array}$$

La funció és $f(x) = x^3 + 6x^2 - 6$.

36 **L'equació de la recta tangent a una funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 2$ és $4x - 3y + 1 = 0$. Quin és el valor de $f'(2)$? I el de $f(2)$?**

Aïllem y de l'equació de la recta tangent: $y = \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$.

$f'(2)$ és el pendent de la recta tangent en $x = 2$; és a dir, $f'(2) = \frac{4}{3}$.

Com que la recta tangent i la corba passen pel punt de tangència, $f(2) = \frac{4}{3} \cdot 2 + \frac{1}{3} = 3$.

37 **Troba una funció de segon grau sabent que passa per $(0, 1)$ i que el pendent de la recta tangent en el punt $(2, -1)$ té valor zero.**

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 2ax + b$

$$\left.\begin{array}{l} f(0)=1 \rightarrow 1=c \\ f(2)=-1 \rightarrow -1=4a+2b+c \\ f'(2)=0 \rightarrow 0=4a+b \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=1/2 \\ b=-2 \\ c=1 \end{array}$$

La funció és $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1$.

38 **Troba els punts singulars i les branques infinites de les funcions següents i representa-les:**

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ **b)** $f(x) = x^4 + 4x^3$ **c)** $f(x) = 12x - x^3$ **d)** $f(x) = -x^4 + 4x^2$

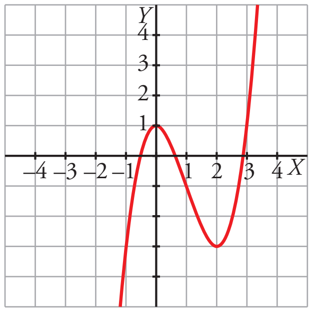
a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(0) = 2,\ f(2) = -3 \rightarrow$ Els punts singulars són (0, 1) i (2, –3).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^3 - 3x^2 + 1) = -\infty$



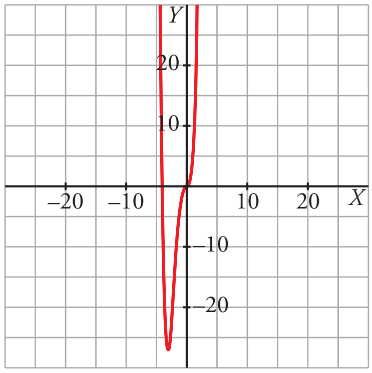
b) $f'(x) = 4x^3 + 12x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 4x^3 + 12x^2 = 0 \rightarrow x = -3,\ x = 0$

$f(-3) = -27,\ f(0) = 0 \rightarrow$ Els punts singulars són (–3, –27) i (0, 0).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$



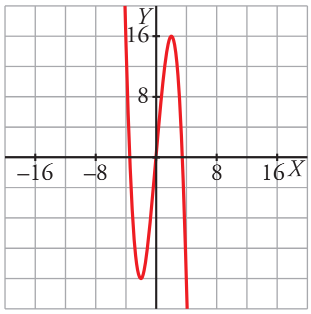
c) $f'(x) = 12 - 3x^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow 12 - 3x^2 = 0 \rightarrow x = -2,\ x = 2$

$f(-2) = -16,\ f(2) = 16 \rightarrow$ Els punts singulars són (–2, –16) i (2, 16).

$\lim\limits_{x \to +\infty} (12x - x^3) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (12x - x^3) = +\infty$



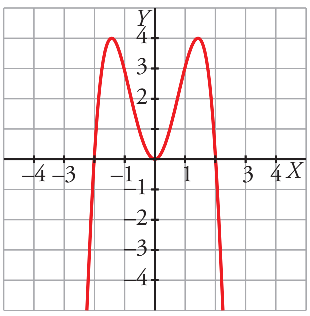
d) $f'(x) = -4x^3 + 8x$

$f'(x) = 0 \rightarrow -4x^3 + 8x = 0 \rightarrow x = -\sqrt{2},\ x = 0,\ x = \sqrt{2}$

$f\left(-\sqrt{2}\right) = 4,\ f(0) = 0,\ f\left(\sqrt{2}\right) = 4 \rightarrow$ Els punts singulars són $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$, (0, 0) i $\left(\sqrt{2}, 4\right)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^4 + 4x^2) = -\infty$



39 **Estudia i representa:**

a) $y = x^3 - 3x + 2$ **b)** $y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$ **c)** $y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$ **d)** $y = x^4 - 8x^2 + 2$

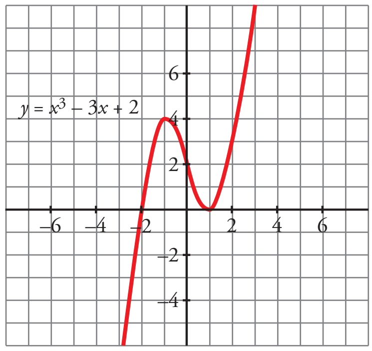
a) $f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \pm 1$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \;\rightarrow\; (1, 0) \\ f(-1) = 4 \;\rightarrow\; (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$



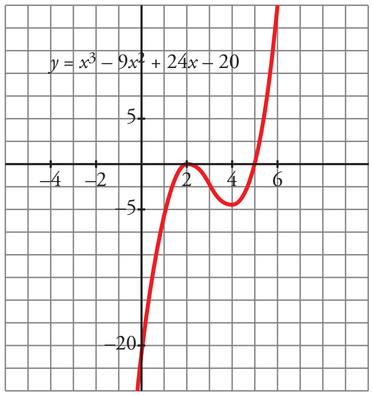
b) $f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \begin{cases} x = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \;\rightarrow\; (4, -4) \\ f(2) = 0 \;\rightarrow\; (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = +\infty$$

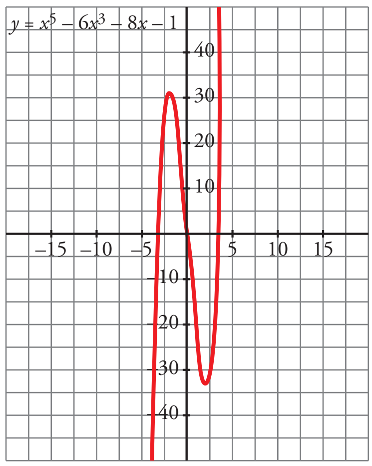


c) $f'(x) = 5x^4 - 18x^2 - 8$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -33 \;\rightarrow\; (2, -33) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = 31 \;\rightarrow\; (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

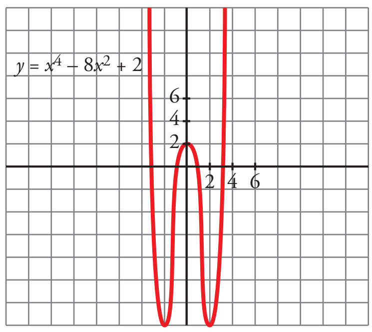


d) $f'(x) = 4x^3 - 16x$

$$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \;\rightarrow\; f(0) = 2 \;\rightarrow\; (0, 2) \\ x = 2 \;\rightarrow\; f(2) = -14 \;\rightarrow\; (2, -14) \\ x = -2 \;\rightarrow\; f(-2) = -14 \;\rightarrow\; (-2, -14) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 - 8x^2 + 2) = -\infty$$

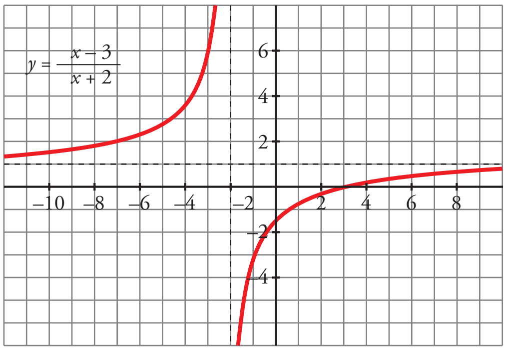


40 **Comprova que aquestes funcions no tenen punts de tangent horitzontal.**
Representa-les estudiant-ne les branques infinites i els punts de tall amb els eixos:

a) $y = \dfrac{x-3}{x+2}$ **b)** $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ **c)** $y = \dfrac{x^3}{3} + 4x$ **d)** $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$

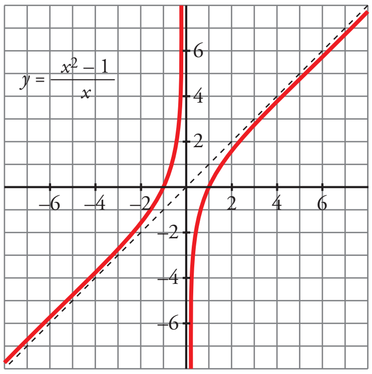
a) $f'(x) = \dfrac{5}{(x+2)^2} \neq 0$

Els punts de tall són: $\left(0, -\dfrac{3}{2}\right)$, $(3, 0)$.



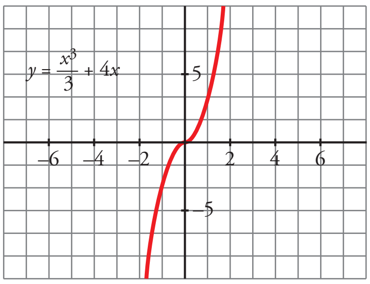
b) $f'(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2} \neq 0$

Els punts de tall són: $(1, 0)$, $(–1, 0)$



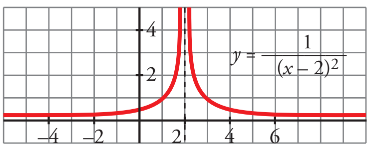
c) $f'(x) = x^2 + 4 \neq 0$

El punt de tall és $(0, 0)$.



d) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$

El punt de tall és $\left(0, \dfrac{1}{4}\right)$.



41 **Estudia i representa les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 16}$ b) $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$ c) $y = \dfrac{x + 2}{x^2 - 6x + 5}$

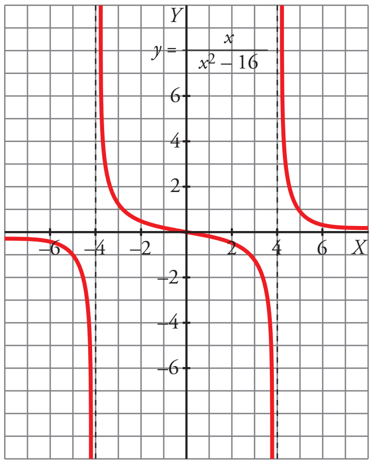
d) $y = \dfrac{(x - 1)^2}{x + 2}$ e) $y = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$ f) $y = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$

a) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 16}{(x^2 - 16)^2}$

Asímptotes verticals: $x = -4$, $x = 4$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.

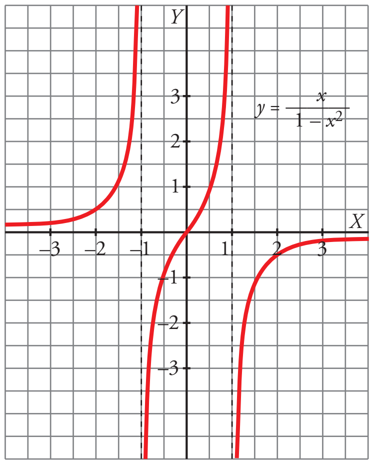


b) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1}{(1 - x^2)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 1$, $x = -1$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües ni punts de tangent horitzontal.



c) $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 4x + 17}{(x^2 - 6x + 5)^2}$

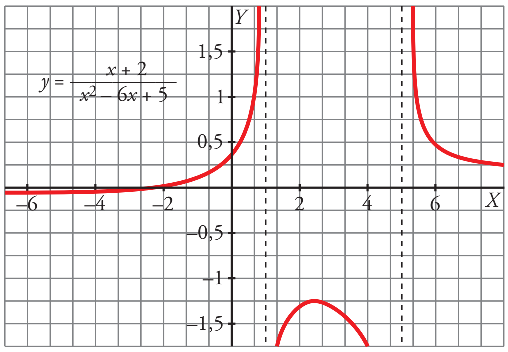
Asímptotes verticals: $x = 5$, $x = 1$

Asímptotes horitzontals: $y = 0$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–6,58; –0,052), (2,58; –1,197)



d) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x - 5}{(x+2)^2}$

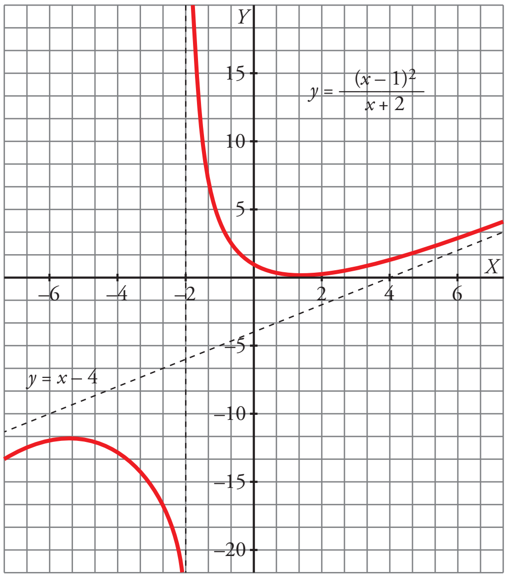
Asímptotes verticals: $x = -2$

Asímptotes obliqües: $y = x - 4$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són:

(1, 0), (–5, 12)



e) $f'(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{(x+2)^2}$

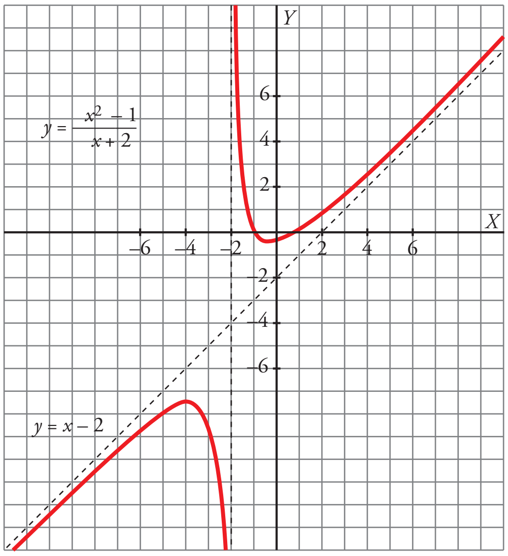
Asímptotes verticals: $x = -2$

Asímptotes obliqües: $y = x - 2$

No hi ha asímptotes horitzontals.

Els seus punts de tangent horitzontal són, aproximadament:

(–0,26; –0,54), (–3,73; –7,46)



f) $f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

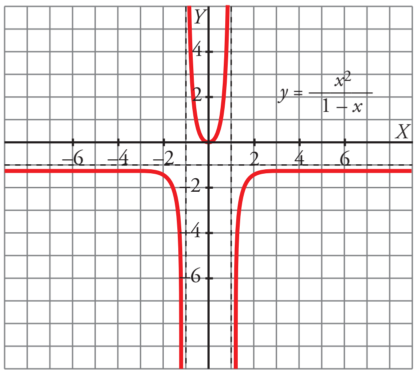
Asímptotes verticals: $x = 1,\ x = -1$

Asímptotes horitzontals: $y = -1$

No hi ha asímptotes obliqües.

El seu punt de tangent horitzontal és:

(0, 0)



Pàgina 329

42 **Troba les asímptotes, els intervals de creixement i de decreixement, els màxims i els mínims, i representa les funcions següents:**

a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ **b)** $y = \dfrac{x^2}{(x-2)^2}$ **c)** $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ **d)** $y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

a) $f'(x) = \dfrac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}$

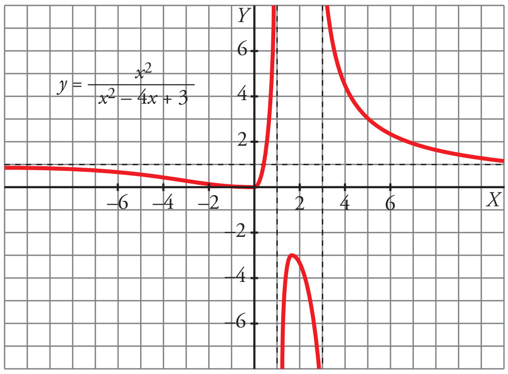
Asímptotes verticals: $x = 3$, $x = 1$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha asímptotes obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són:

$(0, 0)$, $\left(\dfrac{3}{2}, -3\right)$



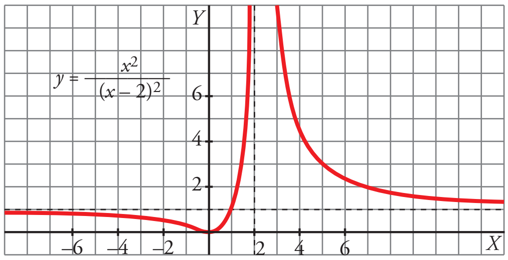
b) $f'(x) = -\dfrac{4x}{(x-2)^3}$

Asímptotes verticals: $x = 2$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha asímptotes obliqües.

El seu punt de tangent horitzontal és: $(0, 0)$



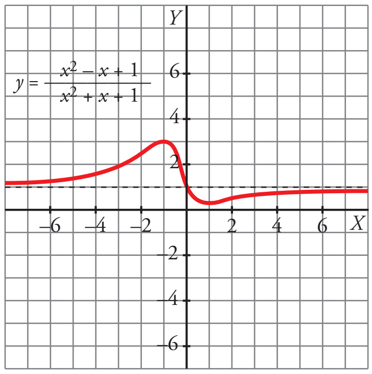
c) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 2}{(x^2 + x + 1)^2}$

Asímptotes horitzontals: $y = 1$

No hi ha asímptotes verticals ni obliqües.

Els seus punts de tangent horitzontal són:

$\left(1, \dfrac{1}{3}\right)$, $(-1, 3)$

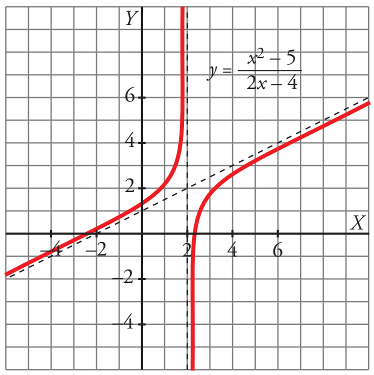


d) $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 10}{(2x - 4)^2}$

Asímptotes verticals: $x = 2$

Asímptotes obliqües: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hi ha asímptotes horitzontals ni punts de tangent horitzontal.



43 **Calcula el valor de a perquè $f(x) = ln\left(\dfrac{x^2}{x+a}\right)$ verifiqui que $f'(2) = 0$.**

$f(x) = 2ln\,x - ln\,(x + a)$

$f'(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+a} \rightarrow f'(2) = 1 - \dfrac{1}{2+a}$

$f'(2) = 0 \rightarrow 1 - \dfrac{1}{2+a} = 0 \rightarrow a = -1$

44 **Donada $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + ax + b$, troba el valor de a i b perquè la recta tangent a f en $x = -2$ sigui $y = 2x - 3$.**

Com que la recta tangent en $x = -2$ és $y = 2x - 3$, tenim que:

$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 2(-2) - 3 = -7 \\ f'(-2) = 2 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 6x^2 + 24x + a$

$f'(-2) = 2 \rightarrow 6(-2)^2 + 24(-2) + a = 2 \rightarrow a = 26$

$f(-2) = -7 \rightarrow 2(-2)^3 + 12(-2)^2 + 26(-2) + b = -7 \rightarrow b = 13$

45 **Troba el valor de k perquè la tangent a la gràfica de la funció $y = x^2 - 5x + k$ en $x = 1$ passi per l'origen de coordenades.**

- Pendent de la recta tangent:

  $f'(x) = 2x - 5 \rightarrow f'(1) = -3$

- Punt de tangència: $x = 1$; $y = 1 - 5 + k \rightarrow (1, -4 + k)$
- Equació de la recta tangent:

  $y = -4 + k - 3(x - 1)$

- Perquè passi per (0, 0), ha de verificar-se:

  $0 = -4 + k + 3 \rightarrow k = 1$

46 **Troba els punts de la gràfica de $f(x) = x^3 - 3x^2 + x$ en què la recta tangent forma un angle de 45° amb l'eix d'abscisses.**

Si la recta tangent forma un angle de 45° amb l'eix OX, el seu pendent és $tg\,45° = 1$.

Busquem els punts on $f'(x) = 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 1 \rightarrow 3x^2 - 6x + 1 = 1 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

Com que $f(0) = 0$ i $f(2) = -2$, els punts (0, 0) i (2, –2) són els que compleixen les condicions del problema.

47 **Donada la paràbola $y = 5 + 6x - 3x^2$, es traça la corda que uneix els punts d'abscissa $x = 0$ i $x = 3$. Troba l'equació de la recta tangent a la paràbola que és paral·lela a aquesta corda.**

$f(0) = 5$ i $f(3) = -4$. Per tant, el pendent de la corda que passa per aquests punts és $\dfrac{-4-5}{3-0} = -3$.

Procurem de trobar el punt que compleixi la igualtat $f'(x) = -3$:

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = -3 \rightarrow 6 - 6x = -3 \rightarrow x = \dfrac{3}{2}$

Com que $f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 5 + 6 \cdot \dfrac{3}{2} - 3 \cdot \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{29}{4}$, la recta tangent és $y = -3\left(x - \dfrac{3}{2}\right) + \dfrac{29}{4}$.

48 **El cost total (en dòlars) de fabricació de q unitats d'un cert article és: $C(q) = 3q^2 + 5q + 75$**

El cost mitjà per unitat és: $M(q) = \dfrac{C(q)}{q}$

a) Quantes unitats s'han de fabricar perquè el cost mitjà per unitat sigui mínim?

b) Calcula $C(q)$ i $M(q)$ per al valor de q que has trobat en l'apartat anterior.

a) $M(q) = \dfrac{3q^2 + 5q + 75}{q}$

$$M'(q) = \frac{(6q+5)\,q - (3q^2+5q+75)}{q^2} = \frac{6q^2+5q-3q^2-5q-75}{q^2} = \frac{3q^2-75}{q^2} = 0 \;\rightarrow$$

$\rightarrow\; q^2 = 25 \;\rightarrow\; q = 5$ unitats

S'han de fabricar 5 unitats.

b) $C(5) = 175;\; M(5) = 35$

49 **La funció $f(x) = \dfrac{60x}{x^2+9}$ ($f(x)$ en milers d'euros, x en anys) indica els beneficis obtinguts per una empresa des que va començar a funcionar.**

a) Representa-la gràficament.

b) Al cap de quant de temps obté l'empresa el benefici màxim? Quin és aquest benefici?

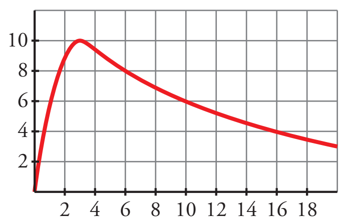
c) Perd diners l'empresa en algun moment?

a) $f'(x) = \dfrac{60\,(x^2+9) - 60x\cdot 2x}{(x^2+9)^2} = \dfrac{60x^2+540-120x^2}{(x^2+9)^2} = \dfrac{-60x^2+540}{(x^2+9)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = 3$ ($x = -3$ no és en el domini).

Màxim en (3, 10).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0 \;\rightarrow$ asímptota horitzontal: $y = 0$

La gràfica seria:



b) Benefici màxim en $x = 3 \;\rightarrow$ Al cap de 3 anys.

El benefici seria $f(3) = 10$ milers d'euros.

c) No perdrà diners ni arribarà un moment en què no obtingui beneficis ni pèrdues, ja que $f(x) = 0$ i $f(x) > 0$ per a tot $x > 0$.

50 **Aplica la regla de l'Hôpital per resoldre els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x}{5x}$ **c)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+5x-1}$

d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{\ln(2x+1)}$ **e)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x + tg\,x}$

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{\sin x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{\cos x} = 1$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg\,x}{5x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+tg^2 x}{5} = \dfrac{1}{5}$

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2+5x-1} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1/x}{2x+5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x(2x+5)} = 0$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\ln(2x+1)} = \dfrac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{\dfrac{2}{2x+1}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x(2x+1)}{2} = +\infty$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin x}{\sin x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\cos x} = 0$

f) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x + tg\, x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1+1+tg^2 x} = \dfrac{1}{2}$

51 **Troba els límits següents:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x - \ln(1+x)]}{x \ln(1+x)}$

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{(e^x-1)^2} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2(e^x-1)e^x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{2e^{2x}-2e^x} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{4e^{2x}-2e^x} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4[x-\ln(1+x)]}{x\ln(1+x)} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4\left[1-\dfrac{1}{1+x}\right]}{\ln(1+x)+\dfrac{x}{1+x}} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4 \cdot \dfrac{x}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\ln(1+x)+x}{1+x}} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4x}{(1+x)\ln(1+x)+x} = \dfrac{0}{0} =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4}{\ln(1+x)+\dfrac{1+x}{1+x}+1} = \dfrac{4}{2} = 2$

52 **Donada la funció $f(x) = ax^3 + bx$, troba a i b perquè f passi pel punt (1, 3) i en aquest punt la tangent sigui paral·lela a la recta $y = 4x + 1$.**

Passa per (1, 3) $\rightarrow f(1) = 3 \rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1 = 3 \rightarrow a + b = 3$

Perquè la recta tangent sigui paral·lela a la recta donada, $f'(1) = 4$

$f'(x) = 3ax^2 + b$

$f'(1) = 4 \rightarrow 3a \cdot 1^2 + b = 4 \rightarrow 3a + b = 4$

Ara, resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} a+b=3 \\ 3a+b=4 \end{array}\right\} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = \frac{5}{2}$$

53 **Determina, en cada cas, els valors màxim i mínim de la funció en l'interval que s'hi indica.**

a) $y = x^2 - 6x - 4,\quad x \in [0, 5]$

b) $y = x^3 - 6x^2 + 12x - 5,\quad x \in [-1, 4]$

c) $y = x^3 - 3x^2,\quad x \in [-2, 4]$

d) $y = \dfrac{x}{x^2+1},\quad x \in [0, 2]$

Trobem els punts singulars que queden dins dels diferents intervals, avaluem en aquests i en els extrems dels intervals.

a) $f'(x) = 2x - 6$

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 6 = 0 \rightarrow x = 3$

$f(0) = -4 \quad f(3) = -13 \quad f(5) = -9$

El màxim es troba en $x = 0$ i val -4.

El mínim es troba en $x = 3$ i val -13.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 12$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12x + 12 = 0 \rightarrow x = 2$

$f(-1) = -24 \quad f(2) = 3 \quad f(4) = 83$

El màxim es troba en $x = 4$ i val 83.

El mínim es troba en $x = -1$ i val -24.

c) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 2$

$f(-2) = -20 \quad f(0) = 0 \quad f(2) = -4 \quad f(4) = 16$

El màxim es troba en $x = 4$ i val 16.

El mínim es troba en $x = -2$ i val -20.

d) $f'(x) = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

$f'(x) = 0 \rightarrow \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$

$f(0) = 0 \quad f(-1) = f(1) = \dfrac{1}{2} \quad f(2) = \dfrac{2}{5}$

El màxim es troba en $x = 1$ i val $\dfrac{1}{2}$.

El mínim es troba en $x = 0$ i val 0.

54 Troba els màxims i els mínims de les funcions $y = sin\ x$ i $y = cos\ x$ en l'interval $[0, 2\pi]$.

- $y = sin\ x$

$f'(x) = cos\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow cos\ x = 0 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2},\ x = \dfrac{3\pi}{2}$

$f(0) = 0 \quad f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \quad f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = -1 \quad f(2\pi) = 0$

El màxim es troba en $x = \dfrac{\pi}{2}$ i val 1.

El mínim es troba en $x = \dfrac{3\pi}{2}$ i val -1.

- $y = cos\ x$

$f'(x) = -sin\ x$

$f'(x) = 0 \rightarrow sin\ x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = \pi,\ x = 2\pi$

$f(0) = 1 \quad f(\pi) = -1 \quad f(2\pi) = 1$

Els màxims es troben en $x = 0$ i $x = 2\pi$ i valen 1.

El mínim es troba en $x = \pi$ i val -1.

55 **Estudia el creixement de les funcions següents i digues quins són els màxims i els mínims:**

a) $y = (x^2 - 3x + 1)e^x$

b) $y = \dfrac{x^2}{e^x}$

c) $y = ln\,(x^2 + 1)$

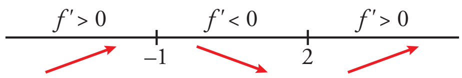
d) $y = x\,ln\,x$

a) Punts singulars:

$f'(x) = (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x + 1)e^x = e^x(x^2 - x - 2)$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; e^x(x^2 - x - 2) = 0 \;\rightarrow\; x^2 - x - 2 = 0 \;\rightarrow\; x = -1,\;\; x = 2$

Creixement i decreixement:



$f(-1) = \dfrac{5}{e} \;\rightarrow\; \left(-1, \dfrac{5}{e}\right)$ és un màxim.

$f(2) = -e^2 \;\rightarrow\; (-1, -e^2)$ és un mínim.

Intervals de creixement: $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

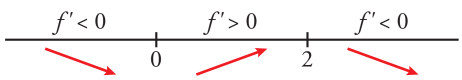
Intervals de decreixement: $(-1, 2)$.

b) Punts singulars:

$f'(x) = \dfrac{2x \cdot e^x - x^2 \cdot e^x}{(e^x)^2} = \dfrac{2x - x^2}{e^x}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{2x - x^2}{e^x} = 0 \;\rightarrow\; x = 0,\;\; x = 2$

Creixement i decreixement:



$f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ és un mínim.

$f(2) = \dfrac{4}{e^2} \;\rightarrow\; \left(2, \dfrac{4}{e^2}\right)$ és un màxim.

Intervals de creixement: $(0, 2)$.

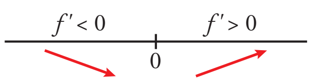
Intervals de decreixement: $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Punts singulars:

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \dfrac{2x}{x^2 + 1} = 0 \;\rightarrow\; x = 0$

Creixement i decreixement:



$f(0) = 0 \;\rightarrow\; (0, 0)$ és un mínim.

Intervals de creixement: $(0, +\infty)$.

Intervals de decreixement: $(-\infty, 0)$.

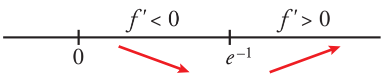
d) $Dom = (0, +\infty)$

Punts singulars:

$f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \;\rightarrow\; \ln x + 1 = 0 \;\rightarrow\; x = e^{-1}$

Creixement i decreixement:



$f(e^{-1}) = -e^{-1} \;\rightarrow\; (e^{-1}, -e^{-1})$ és un mínim.

Intervals de creixement: $(e^{-1}, +\infty)$.

Intervals de decreixement: $(0, e^{-1})$.

56 **Prova que hi ha un punt de la corba $y = arc\ tg\ \dfrac{x-1}{x+1}$ en el qual la recta tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.**

La bisectriu del primer quadrant té pendent 1. Per tant, el punt en què la recta tangent és paral·lela a aquesta, compleix l'equació.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot \frac{2}{(x+1)^2} = \frac{1}{x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 \;\rightarrow\; \frac{1}{x^2+1} = 1 \;\rightarrow\; x = 0$$

$f(0) = -\dfrac{\pi}{4} \;\rightarrow\;$ En el punt $\left(0, -\dfrac{\pi}{4}\right)$ la tangent a la corba és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant.

57 **Estudia la continuïtat i la derivabilitat d'aquestes funcions:**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 5 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} 2x - 5 & \text{si } x < 3 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} e^x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + x + 3 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a) Anomenem $f_1(x) = x^2 - 2x + 1$ i $f_2(x) = -2x + 5$. Ambdues funcions són contínues i derivables pel fet de ser polinòmiques.

$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = 1 \\ f_2(2) = 1 \end{array}\right\}$ Per tant, la funció $f(x)$ també és contínua en el punt de ruptura i, en conseqüència, ho és en tot $\mathbb{R}$.

$f'_1(x) = 2x - 2$ i $f'_2(x) = -2$

$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = 2 \\ f'_2(2) = -2 \end{array}\right\}$ Com que $f'_1(2) \neq f'_2(2)$, la funció $f(x)$ no és derivable en $x = 2$.

La derivada queda així:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 2 & \text{si } x < 2 \\ -2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

b) Anomenem $g_1(x) = 2x - 5$ i $g_2(x) = \sqrt{x-2}$. Ambdues funcions són contínues i derivables on estan definides.

$$\left.\begin{array}{l} g_1(3) = 1 \\ g_2(3) = 1 \end{array}\right\}$$ Per tant, la funció $g(x)$ també és contínua en el punt de ruptura i, en conseqüència, ho és en tot $\mathbb{R}$.

$$g'_1(x) = 2 \text{ i } g'_2(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-2}}$$

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(3) = 2 \\ g'_2(3) = 1/2 \end{array}\right\}$$ Com que $g'_1(3) \neq g'_2(3)$, la funció $g(x)$ no és derivable en $x = 3$.

La derivada queda així:

$$g'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-2}} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

c) Anomenem $h_1(x) = e^x + 2$ i $h_2(x) = x^2 + x + 3$. Ambdues funcions són contínues i derivables.

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = 3 \\ h_2(0) = 3 \end{array}\right\}$$ Per tant, la funció $h(x)$ també és contínua en el punt de ruptura i, en conseqüència, ho és en tot $\mathbb{R}$.

$$h'_1(x) = e^x \text{ i } h'_2(x) = 2x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 1 \\ h'_2(0) = 1 \end{array}\right\}$$ Com que $h'_1(0) = h'_2(0)$, la funció $h(x)$ és derivable en $x = 0$ i $h'(0) = 1$.

La derivada queda així:

$$h'(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x \leq 3 \\ 2x + 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

58 Calcula, en cada cas, els valors de m i n perquè les funcions següents siguin derivables en $\mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 5x + m & \text{si } x \leq 2 \\ -x^2 + nx & \text{si } x > 2 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} mx^2 + nx - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2nx - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

c) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } x > 0 \end{cases}$

d) $j(x) = \begin{cases} mx^2 + 3x & \text{si } x < -2 \\ x^2 - nx - 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

a) Anomenem $f_1(x) = x^2 - 5x + m$ i $f_2(x) = -x^2 + nx$. Ambdues funcions són contínues i derivables pel fet de ser polinòmiques.

Perquè la funció sigui contínua en el punt de ruptura $x = 2$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(2) = -6 + m \\ f_2(2) = -4 + 2n \end{array}\right\} \rightarrow -6 + m = -4 + 2n$$

$$f'_1(x) = 2x - 5 \text{ y } f'_2(x) = -2x + n$$

Perquè sigui derivable en el punt de ruptura $x = 2$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} f'_1(2) = -1 \\ f'_2(2) = -4 + n \end{array}\right\} \rightarrow -1 = -4 + n$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -6 + m = -4 + 2n \\ -1 = -4 + n \end{array}\right\} \rightarrow \text{Els valors són } m = 8,\ n = 3.$$

b) Anomenem $g_1(x) = mx^2 + nx - 3$ i $g_2(x) = 2nx - 4$. Ambdues funcions són contínues i derivables pel fet de ser polinòmiques.

Perquè la funció sigui contínua en el punt de ruptura $x = 1$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} g_1(1) = m + n - 3 \\ g_2(1) = 2n - 4 \end{array}\right\} \rightarrow m + n - 3 = 2n - 4$$

$g'_1(x) = 2mx + n$ i $g'_2(x) = 2n$

Perquè sigui derivable en el punt de ruptura $x = 1$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} g'_1(1) = 2m + n \\ g'_2(1) = 2n \end{array}\right\} \rightarrow 2m + n = 2n$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} m + n - 3 = 2n - 4 \\ 2m + n = 2n \end{array}\right\} \rightarrow \text{Els valors són } m = 1,\ n = 2.$$

c) Anomenem $h_1(x) = (x - 1)^3$ i $h_2(x) = mx + n$. Ambdues funcions són contínues i derivables pel fet de ser polinòmiques.

Perquè la funció sigui contínua en el punt de ruptura $x = 0$ ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} h_1(0) = -1 \\ h_2(0) = n \end{array}\right\} \rightarrow n = -1$$

$h'_1(x) = 3(x - 1)^2$ i $h'_2(x) = m$

Perquè sigui derivable en el punt de ruptura $x = 0$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} h'_1(0) = 3 \\ h'_2(0) = m \end{array}\right\} \rightarrow m = 3$$

d) Anomenem $j_1(x) = mx^2 + 3x$ i $j_2(x) = x^2 - nx - 4$. Ambdues funcions són contínues i derivables pel fet de ser polinòmiques.

Perquè la funció sigui contínua en el punt de ruptura $x = -2$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} j_1(-2) = 4m - 6 \\ j_2(-2) = 2n \end{array}\right\} \rightarrow 4m - 6 = 2n$$

$j'_1(x) = 2mx + 3$ i $j'_2(x) = 2x - n$

Perquè sigui derivable en el punt de ruptura $x = -2$, ha de ser:

$$\left.\begin{array}{l} j'_1(-2) = -4m + 3 \\ j'_2(-2) = -4 - n \end{array}\right\} \rightarrow -4m + 3 = -4 - n$$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 4m - 6 = 2n \\ -4m + 3 = -4 - n \end{array}\right\} \rightarrow \text{Els valors són } m = 2,\ n = 1.$$

Pàgina 330

59 **Donades les funcions $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$ i $f(x) = e^{2x}$ troba, en cada cas, f', f'', f''', f^{IV}. Quina serà la derivada enèsima de cada una de les funcions donades?**

- $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x$

  $f'(x) = 4x^3 - 10x + 6$

  $f''(x) = 12x^2 - 10$

  $f'''(x) = 24x$

  $f^{IV}(x) = 24$

  $f^{V}(x) = 0$ i, des d'aquesta, totes les derivades successives següents.

- $f(x) = e^{2x}$

  $f'(x) = 2\,e^{2x}$

  $f''(x) = 4\,e^{2x}$

  $f'''(x) = 8\,e^{2x}$

  $f^{IV}(x) = 16\,e^{2x}$

  La fórmula general, tenint en compte que els coeficients són potències de base 2, és:

  $f^{n)}(x) = 2^n e^{2x}$

60 **Troba dos nombres positius la suma dels quals sigui 100 i el seu producte sigui màxim.**

Siguin x i y dos nombres positius.

$x + y = 100 \rightarrow y = 100 - x$

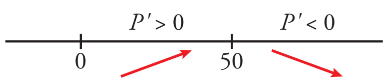
El producte és $P = xy = x(100 - x) = 100x - x^2$

Busquem que el producte sigui màxim:

$P' = 100 - 2x$

$P' = 0 \rightarrow 100 - 2x = 0 \rightarrow x = 50 \rightarrow y = 100 - 50 = 50$

Ara comprovem si el valor $x = 50$ és un màxim:



Per tant, quan $x = y = 50$, s'obté el producte màxim que és $P = 2\,500$.

61 **Calcula dos nombres la suma dels quals sigui 50 i tals que la suma dels seus quadrats sigui mínima.**

Siguin x i y dos nombres.

$x + y = 50 \rightarrow y = 50 - x$

La suma dels quadrats és $S = x^2 + y^2 = x^2 + (50 - x)^2 = 2x^2 - 100x + 2\,500$

Busquem que la suma de quadrats sigui mínima:

$S' = 4x - 100$

$S' = 0 \rightarrow 4x - 100 = 0 \rightarrow x = 25 \rightarrow y = 50 - 25 = 25$

Ara comprovem si el valor $x = 25$ és un mínim:

		25	
	$S' < 0$		$S' > 0$
	$\searrow$		$\nearrow$

Per tant, quan $x = y = 25$, s'obté la suma de quadrats mínima, que és $S = 1\,250$.

62 Troba dos nombres positius el producte dels quals sigui 100 i la seva suma sigui mínima.

Siguin x, y els nombres positius.

$xy = 100 \rightarrow y = \dfrac{100}{x}$

La suma és $S = x + y = x + \dfrac{100}{x}$

Volem trobar la suma mínima:

$S' = 1 - \dfrac{100}{x^2}$

$S' = 0 \rightarrow 1 - \dfrac{100}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 10 \rightarrow x = 10$ (només és vàlid el resultat positiu)

Vegem si és un mínim:

0		10	
	$S' < 0$		$S' > 0$
	$\searrow$		$\nearrow$

Per tant, quan $x = 10$, $y = \dfrac{100}{10} = 10$, s'obté la suma mínima, que és $S = 20$.

63 Troba la base i l'altura del triangle isòsceles de perímetre 30 cm l'àrea del qual sigui la major possible.

* ***Anomena x la meitat de la base.***

Si anomenem x la meitat de la base i h l'altura del triangle, el costat desigual mesura $2x$ i cada un dels costats iguals mesura $\dfrac{30 - 2x}{2} = 15 - x$.

Pel teorema de Pitàgores: $\text{h} = \sqrt{(15 - x)^2 - x^2} = \sqrt{225 - 30x}$

L'àrea del triangle és $A = \dfrac{2x\sqrt{225 - 30x}}{2} = x\sqrt{225 - 30x}$

$A' = \sqrt{225 - 30x} + \dfrac{x(-30)}{2\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 30x - 15x}{\sqrt{225 - 30x}} = \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}}$

$A' = 0 \rightarrow \dfrac{225 - 45x}{\sqrt{225 - 30x}} = 0 \rightarrow 225 - 45x = 0 \rightarrow x = 5$ cm

Comprovem si hem obtingut un màxim.

0		5	
	$A' > 0$		$A' < 0$
	$\nearrow$		$\searrow$

Efectivament, $x = 5$ cm és un màxim. La base mesura 10 cm, l'altura mesura $\text{h} = \sqrt{225 - 150} = 5\sqrt{3}$ cm i l'àrea màxima és $A = 25\sqrt{3}$ cm^2.

64 **Amb 100 m de tanca volem delimitar una parcel·la rectangular aprofitant una paret, de manera que només hàgim de tancar tres dels costats. Calcula les dimensions de la parcel·la d'àrea màxima que podem tancar.**

Anomenem x els costats del rectangle perpendiculars a la paret i y el costat paral·lel a aquesta.

$2x + y = 100 \rightarrow y = 100 - 2x$

L'àrea del rectangle és:

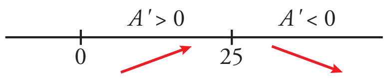
$A = xy = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2$

Volem trobar el valor que dóna lloc a l'àrea màxima:

$A' = 100 - 4x$

$A' = 0 \rightarrow 100 - 4x = 0 \rightarrow x = 25$ m

Comprovem que és un màxim:



Per tant, l'àrea màxima es produeix si $x = 25$ m, $y = 100 - 50 = 50$ m i és $A = 25 \cdot 50 = 1\,250$ m^2.

65 **Troba els costats del rectangle d'àrea màxima entre tots els que tenen la diagonal de 12 cm.**

Anomenem x, y la base i l'altura del rectangle, respectivament.

$x^2 + y^2 = 12^2 \rightarrow y = \sqrt{144 - x^2}$

L'àrea del rectangle és:

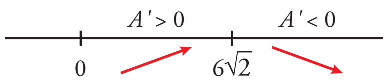
$A = xy = x\sqrt{144 - x^2}$

Trobem el valor que dóna l'àrea màxima:

$$A' = \sqrt{144 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = \frac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}}$$

$A' = 0 \rightarrow \dfrac{144 - 2x^2}{\sqrt{144 - x^2}} = 0 \rightarrow 144 - 2x^2 = 0 \rightarrow$ Obtenim només una solució vàlida: $x = 6\sqrt{2}$ cm.

Comprovem que és un màxim:



Els costats $x = 6\sqrt{2}$ cm, $y = \sqrt{144 - (6\sqrt{2})^2} = 6\sqrt{2}$ cm ens proporcionen el rectangle d'àrea màxima, que és $A = 72$ cm^2.

66 **Es vol construir un barril cilíndric amb una capacitat de 150 *l*. Troba el radi i l'altura del cilindre perquè la quantitat de xapa emprada en la construcció sigui mínima.**

Siguin r i h el radi i l'altura del cilindre, respectivament.

$\pi r^2 \mathrm{h} = 150 \rightarrow \mathrm{h} = \dfrac{150}{\pi r^2}$

La quantitat de xapa és igual a la suma de l'àrea lateral més les àrees de les tapes:

$$A = 2\pi r\mathrm{h} + 2\pi r^2 = 2\left(\pi r \frac{150}{\pi r^2} + \pi r^2\right) = 2\left(\frac{150}{r} + \pi r^2\right)$$

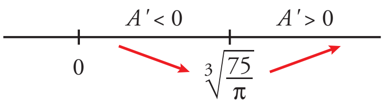
Trobem el valor que dóna l'àrea mínima.

$$A' = 2\left(-\frac{150}{r^2} + 2\pi r\right)$$

$$A' = 0 \;\rightarrow\; -\frac{150}{r^2} + 2\pi r = 0 \;\rightarrow\; 2\pi r = \frac{150}{r^2} \;\rightarrow\; r^3 = \frac{150}{2\pi} \;\rightarrow\; r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}} \;\rightarrow$$

$$\rightarrow\; \mathrm{h} = \frac{150}{\pi r^2} = \frac{150}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}\right)^2} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$$

Comprovem que $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ és un mínim:



Per tant, les mesures són $r = \sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm, $\mathrm{h} = 2\sqrt[3]{\frac{75}{\pi}}$ dm.

67 **De tots els ortoedres de base quadrada i àrea total igual a 20 cm², troba les dimensions del que té el volum més gran.**

Suposem que x és el costat de la base quadrada i que y és l'altura de l'ortoedre.

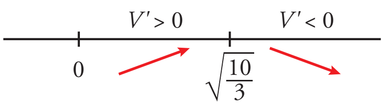
L'àrea total és igual a 20 cm² $\rightarrow$ $2x^2 + 4xy = 20 \;\rightarrow\; y = \frac{10 - x^2}{2x}$

El volum de l'ortoedre és $V = x^2 y = x^2\,\frac{10 - x^2}{2x} = \frac{10x - x^3}{2}$.

Trobem el valor de x que proporciona el volum màxim.

$$V' = \frac{10 - 3x^2}{2}$$

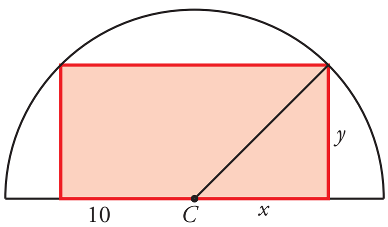
$V' = 0 \;\rightarrow\; \frac{10 - 3x^2}{2} = 0 \;\rightarrow\; x = \sqrt{\frac{10}{3}}$ (el resultat negatiu no té sentit).



L'altura és $y = \frac{10 - \sqrt{10/3}^2}{2\sqrt{10/3}} = \sqrt{\frac{10}{3}}$ i el volum màxim, $V = \frac{10}{3}\sqrt{\frac{10}{3}}$ cm³.

68 **En un semicercle de radi 10 cm s'inscriu un rectangle. Calcula les dimensions d'aquest rectangle perquè la seva àrea sigui màxima.**

Siguin x i y la semibase i l'altura del rectangle, respectivament.



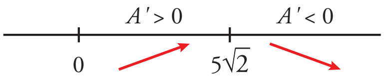
$x^2 + y^2 = 10^2 \;\rightarrow\; y = \sqrt{100 - x^2}$

L'àrea és $A = 2x\sqrt{100 - x^2}$

Trobem el valor de x que proporciona l'àrea màxima:

$$A' = 2\left(\sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}}\right) = 2\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

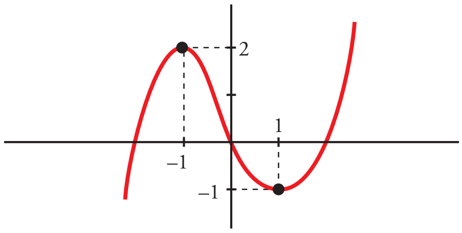
$$A' = 0 \;\rightarrow\; 2\frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \;\rightarrow\; 100-2x^2 = 0 \;\rightarrow\; x = 5\sqrt{2}$$ (el resultat negatiu no té sentit).



Si $x = 5\sqrt{2}$ cm $\rightarrow$ $y = \sqrt{100-(5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$ cm i l'àrea màxima és $A = 50$ cm^2.

Qüestions teòriques

69 **Dibuixa una funció que tingui derivada nul·la en $x = 1$ i en $x = -1$, derivada negativa en l'interval [–1, 1] i positiva per a qualsevol altre valor de x.**



70 **Posa exemples de funcions f la derivada de les quals sigui $f'(x) = 2x$. Quantes n'hi ha?**

N'existeixen infinites.

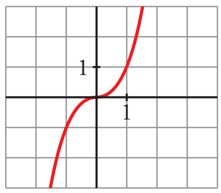
$f(x) = x^2 + k$, on x és qualsevol número.

71 **Aquesta es la gràfica de la funció $y = x^3$.**

a) Té cap punt singular?

b) És creixent o decreixent en $x = 0$?

c) Quina és l'equació de la recta tangent en $x = 0$?

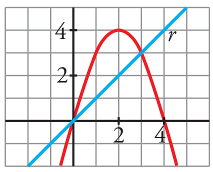


a) El punt (0, 0) té tangent horitzontal. Aquest és l'únic punt singular.

b) La funció és creixent en $x = 0$.

c) La recta tangent en $x = 0$ és $y = 0$.

72 **Hi ha cap punt de la funció $y = 4x - x^2$ en el qual la tangent sigui paral·lela a la recta r? En cas afirmatiu, troba'l.**



$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 4-2x \\ \text{Pendent de la recta} = 1 \end{array}\right\} \; 4-2x = 1 \;\rightarrow\; x = \frac{3}{2}$$

Punt $\left(\frac{3}{2}, \frac{15}{4}\right)$

73 **Demostra, usant la derivada, que l'abscissa del vèrtex de la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ és $x = \frac{-b}{2a}$.**

$f'(x) = 2ax + b = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-b}{2a}$

74 **Sabent que $f'(2) = 0$, quina d'aquestes afirmacions és correcta?**

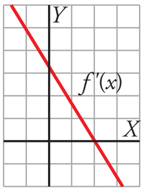
a) La funció f té màxim o mínim en $x = 2$.

b) La recta tangent en $x = 2$ és horitzontal.

c) La funció passa pel punt (2, 0).

La correcta és la b).

75



Aquesta és la gràfica de f', la funció derivada de f.

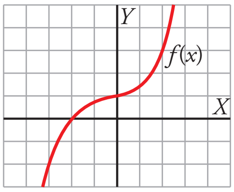
a) Té f cap punt de tangent horitzontal?

b) És f creixent o decreixent?

a) Sí, en $x = 2$, ja que $f'(2) = 0$.

b) Si $x < 2$ és creixent, ja que $f' > 0$; i si $x > 2$ és decreixent, ja que $f' > 0$.

76



Observa la gràfica de la funció $y = f(x)$.

Quina serà la gràfica d'una funció $y = g(x)$ tal que $g'(x) = f'(x)$ i $g(0) = -1$?

Com que $f(0) = 1$, ha de ser $g(x) = f(x) - 2$; és a dir, seria la mateixa gràfica que la de $f(x)$, però desplaçada dues unitats cap avall. D'aquesta manera:

$g(0) = f(0) - 2 = 1 - 2 = -1$

$g'(x) = D[f(x) - 2] = f'(x)$

77 **Sabem que $f'(x) = \dfrac{1}{x-3}$ i $g(x) = x^2 + 1$. Troba, si és possible:**

a) $Df[g(2)]$

b) $Df[g(x)]$

c) $Dg[f(2)]$

a) $Df[g(2)] = Df(2^2 + 1) = Df(5) = \dfrac{1}{5-3} = \dfrac{1}{2}$

b) $Df[g(x)] = Df(x^2 + 1) = \dfrac{1}{x^2+1-3} = \dfrac{1}{x^2-2}$

c) No és possible perquè no es pot determinar $f(2)$.

78 **Sabem que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$ i $h(x) = e^{f(x)}$. Quin d'aquests tres valors correspon a $h'(0)$?**

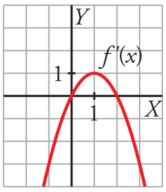
a) $\dfrac{1}{e}$ **b) 0** **c) 1**

$h'(x) = e^{f(x)} \cdot f'(x)$

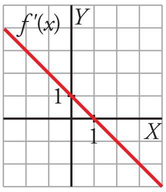
Per tant, $h'(0) = e^{f(0)} \cdot f'(0) = e^0 \cdot 1 = 1$, que es correspon amb b).

79 **Quina d'aquestes gràfiques correspon a la funció derivada d'una corba que té un màxim en $x = 1$? Per què?**

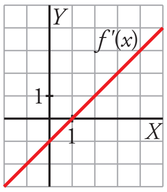
a)



b)

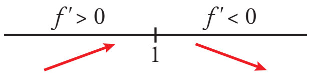


c)



La gràfica de l'apartat b), perquè $f'(1) = 0$.

A més,



En conseqüència, $x = 1$ és un màxim.

80 **Cert o fals? Justifica la resposta.**

a) Si $f'(a) > 0$, aleshores f és creixent en $x = a$.

b) Si $f'(a) = 0$, aleshores f no creix ni decreix en $x = a$.

c) Si f és decreixent en $x = a$, aleshores $f'(a) < 0$.

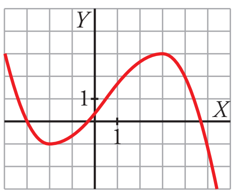
a) Cert.

b) Fals. Hi ha funcions amb punts singulars on la funció és creixent. Per exemple, $f(x) = x^3$ és creixent en el punt singular (0, 0).

c) Fals. La funció $f(x) = -x^3$ sempre és decreixent i $f'(0) = 0$.

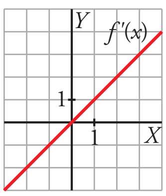
Pàgina 331

81 **Aquesta és la gràfica d'una funció $y = f(x)$:**

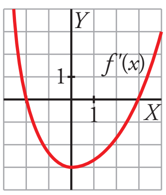


Quina de les gràfiques de sota pot ser la de $f'(x)$? Justifica-ho.

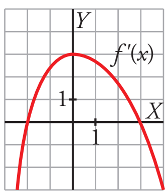
a)



b)



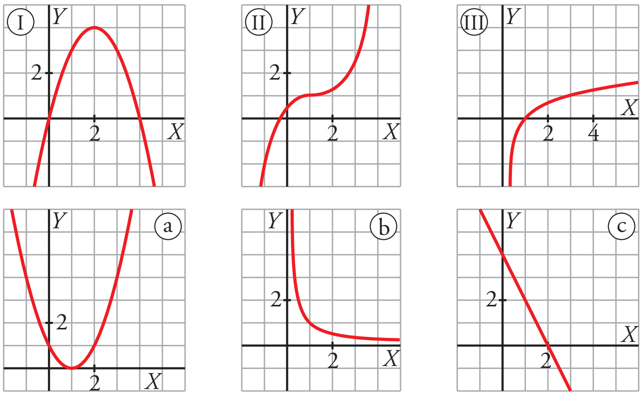
c)



La gràfica de l'apartat c), perquè $f'(-2) = f'(3) = 0$ en ser $x = -2$ i $x = 3$ punts singulars de $f(x)$.

Com que $f(x)$ creix en l'interval $(-2, 3)$, $f'(x) > 0$ i això només passa en l'apartat c). La resta de la gràfica de c) és coherent amb la de $f(x)$.

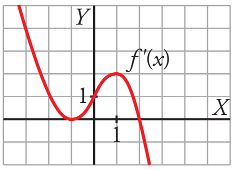
82 **Associa amb cada una de les gràfiques I, II i III la gràfica de la seva funció derivada.**

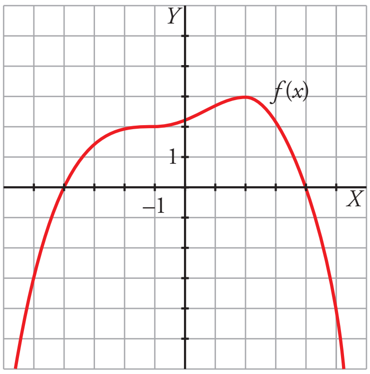


I → c II → a III → b

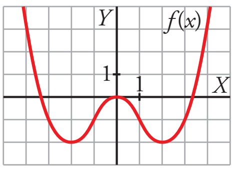
Per aprofundir

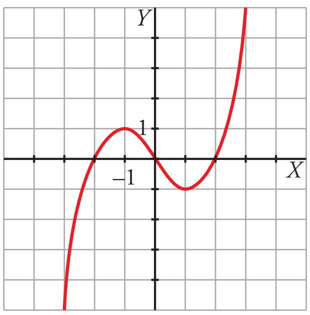
83 **Representa una funció $y = f(x)$ de la qual sabem que $f(-1) = 2$, $f(2) = 3$ i que té per gràfica de la seva funció derivada $f'(x)$ la següent:**





84 **Observa la gràfica de la funció $y = f(x)$ i representa de manera aproximada la funció $y = f'(x)$.**





85 **Troba les asímptotes obliqües de la funció $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ i estudia la posició de la corba respecte d'elles. Després calcula'n els punts singulars i representa'n la funció.**

Asímptotes obliqües:

Com que la funció no és un quocient de polinomis, trobem les asímptotes obliqües fent servir límits.

Recordem que si l'asímptota és $y = ax + b$, aleshores:

$$a = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)} = 0$$

Quan $x \to +\infty$, l'asímptota obliqua és $y = x$.

$$a = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} = -1 \quad \text{(perquè } x \text{ és negativa)}$$

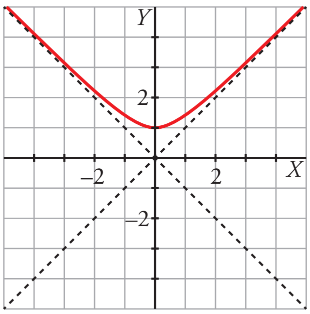
$$b = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - (-x)\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2+1} + x\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)} = 0$$

Quan $x \to -\infty$, l'asímptota obliqua és $y = -x$.

Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

Aquesta derivada només s'anul·la si $x = 0$. Com que $f(0) = 1$, l'únic punt singular és (0, 1).



86 **Prova que la funció $f(x) = \sqrt{x}$ no té derivada en $x = 0$.**

El domini de definició de $f(x)$ és l'interval $(0, +\infty)$; per tant, per poder usar la definició de derivada, només podem calcular el límit per la dreta.

La derivada en $x = 0$ hauria de ser el límit:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}h}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

Com que el límit anterior no existeix, la funció $f(x) = \sqrt{x}$ no és derivable en $x = 0$.

87 **Donada la funció:** $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c & \text{si } x \le 0 \\ ln(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$ **, determina els valors de** a**,** b **i** c **perquè la funció sigui contínua, tingui un màxim en** $x = -1$ **i la tangent en** $x = -2$ **sigui paral·lela a la recta** $y = 2x$**.**

Anomenem $f_1(x) = ax^2 + bx + c$ i $f_2(x) = ln\,(x + 1)$. Ambdues funcions són contínues i derivables on estan definides.

Perquè sigui contiínua en $x = 0$, ha de passar que $f_1(0) = f_2(0)$.

$$\left.\begin{array}{l} f_1(0) = c \\ f_2(0) = 0 \end{array}\right\} \rightarrow c = 0$$

Perquè tingui un màxim en $x = -1$, ha de passar que $f'(-1) = 0$; és a dir, $f'_1(-1) = 0$.

$f'_1(x) = 2ax + b$

$2a(-1) + b = 0 \rightarrow -2a + b = 0$

Perquè la tangent en $x = -2$ sigui paral·lela a la recta $y = 2x$, ha de ser $f'(-2) = 2$; és a dir, $f'_1(-2) = 2$.

Per tant, $2a(-2) + b = 2 \rightarrow -4a + b = 2$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} -2a + b = 0 \\ -4a + b = 2 \end{array}\right\} \rightarrow a = -1,\ b = -2$$

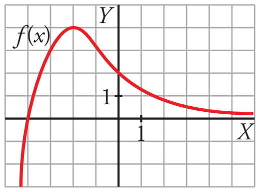
La funció és $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x & \text{si } x \le 0 \\ ln\,(x+1) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ara podem comprovar que el punt $(-1,\ 1)$ és un màxim de $f(x)$ estudiant $f'_1(x) = -2x - 2$ en l'interval de definició de $f_1(x)$.

Autoavaluació

Pàgina 331

1 Observa la gràfica de la funció $y = f(x)$ i respon.



a) Quina és la TVM en els intervals [0, 3] i [–4, –2]?

b) Té algun punt de tangent horitzontal?

c) Per a quins valors de x és $f'(x) > 0$?

d) Sabem que la tangent en el punt d'abscissa $x = 0$ és paral·lela a la bisectriu del segon quadrant. Quant val $f'(0)$?

a) TVM $[0, 3] = \dfrac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \dfrac{1/2 - 2}{3} = -\dfrac{1}{2}$

TVM $[-4, -2] = \dfrac{f(-2) - f(-4)}{-2 - (-4)} = \dfrac{4 - 0}{-2 + 4} = 2$

b) Sí, $P(-2, 4)$.

c) Si $x < -2$, $f'(x) > 0$.

d) La recta $y = -x$ (bisectriu del segon quadrant) té pendent igual a -1. Per tant, $f'(0) = -1$.

2 Donada $f(x) = x^2 - 3x$, prova que $f'(-2) = -7$ aplicant-hi la definició de derivada.

$f'(-2) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h}$

$f(-2) = (-2)^2 - 3(-2) = 4 + 6 = 10$

$f(-2 + h) = (-2 + h)^2 - 3(-2 + h) = 4 - 4h + h^2 + 6 - 3h = h^2 - 7h + 10$

$f(-2 + h) - f(-2) = h^2 - 7h$

$\dfrac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} = \dfrac{h^2 - 7h}{h} = h - 7$

$\lim_{h \to 0} h - 7 = -7$

Per tant, $f'(-2) = -7$.

3 Troba la derivada de les funcions següents:

a) $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^2}$ **b)** $y = ln\left(\dfrac{x}{3} \cdot e^{-x}\right)$ **c)** $y = cos^2 \pi x$ **d)** $y = \left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^3$

a) $f(x) = x^{1/3} + 2x^{-2}$

$f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-2/3} - 4x^{-3} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{4}{x^3}$

b) $f(x) = ln\left(\dfrac{x}{3}\right) + ln\, e^{-x} = ln\, x - ln\, 3 - x$

$f'(x) = \dfrac{1}{x} - 1 = \dfrac{1 - x}{x}$

c) $f'(x) = 2\pi\, cos\, \pi\, x(-sin\, \pi x) = -2\pi\, cos\, \pi x \cdot sin\, \pi x$

d) $f'(x) = 3\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right)^2 D\left(\dfrac{x^2}{x - 2}\right) = 3\,\dfrac{x^4}{(x - 2)^2} \cdot \dfrac{2x(x - 2) - x^2}{(x - 2)^2} = \dfrac{3x^4(x^2 - 4x)}{(x - 2)^4}$

4 **Escriu l'equació de la tangent a la corba $y = ln\, x^2$ en el punt d'abscissa $x = 1$.**

Punt de tangència: $x = 1,\ y = ln\ 1^2 = 0 \rightarrow P(1, 0)$

Pendent de la recta tangent: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} \rightarrow f'(1) = 2$

Equació: $y = 0 + 2(x - 1) \rightarrow y = 2x - 2$

5 **Troba els punts singulars de la funció $y = 2 + (1 - x)^3$. Té màxim o mínim relatiu, aquesta funció?**

$f(x) = 2 + (1 - x)^3 \rightarrow f'(x) = 3(1 - x)^2(-1) = -3(1 - x)^2$

$f'(x) = 0 \rightarrow -3(1 - x)^2 = 0 \rightarrow 1 - x = 0 \rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 + (1 - 1)^3 = 2$

Punt singular: (1, 2).

Com que $f'(x) = -3(1 - x)^2$ és menor que 0 per a qualsevol valor de $x \neq 1$, f és decreixent en tot el seu domini i, per tant, el punt singular no és màxim ni mínim.

6 **Donada la funció: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 4}{2 - x}$**

a) Estudia'n les asímptotes i la posició de la corba respecte d'elles.

b) Troba'n els màxims i els mínims.

c) Representa-la.

a) • Asímptotes verticals: $x = 2$, perquè aquest valor anul·la el denominador però no el numerador.

ESQUERRA: $\dfrac{1{,}99^2 - 2 \cdot 1{,}99 + 4}{2 - 1{,}99} = 398 \rightarrow f(x) \rightarrow +\infty$

DRETA: $\dfrac{2{,}01^2 - 2 \cdot 2{,}01 + 4}{2 - 2{,}01} = -402 \rightarrow f(x) \rightarrow -\infty$

• Branques infinites. Com que la diferència entre els graus del numerador i del denominador és 1, té una asímptota obliqua.

$\dfrac{x^2 - 2x + 4}{-x + 2} = -x - \dfrac{4}{x - 2} \rightarrow$ La recta $y = -x$ és l'asímptota obliqua.

$f(x) - (-x) = -\dfrac{4}{x - 2}$

Si $x \rightarrow -\infty$, $f(x) - (-x) > 0 \rightarrow$ La funció està sobre l'asímptota.

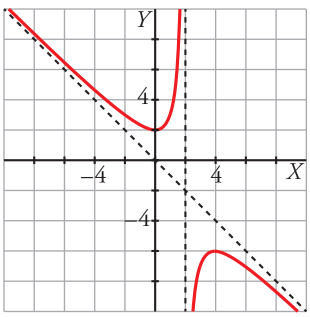
Si $x \rightarrow +\infty$, $f(x) - (-x) < 0 \rightarrow$ La funció està sota l'asímptota.

b) $f'(x) = \dfrac{(2x - 2)(2 - x) - (x^2 - 2x + 4) \cdot (-1)}{(2 - x)^2} = \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2}$

$f'(x) = 2 \rightarrow \dfrac{-x^2 + 4x}{(2 - x)^2} = 0 \rightarrow -x^2 + 4x = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 4$

$f(0) = 0,\ f(4) = -6 \rightarrow$ Els punts $(0, 2)$ i $(4, -6)$ són punts singulars, on el primer és un mínim i el segon és un màxim.

c)



7 **Representa la funció $f(x) = x^3 - 12x + 16$.**

$y = x^3 - 12x + 16$ és una funció polinòmica; per tant, és contínua en $\mathbb{R}$.

- Branques infinites:

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 12x + 16) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 12x + 16) = -\infty$$

- Punts singulars:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

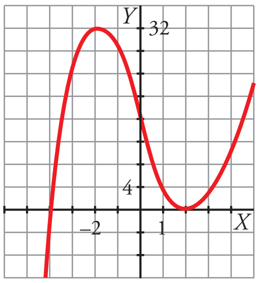
$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 - 12 = 0 \left\langle \begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array} \right.$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 3 + 16 = 0 \rightarrow (2, 0)$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 16 = 32 \rightarrow (-2, 32)$$

Els punts singulars són (2, 0) i (–2, 32).

Aquesta és la seva gràfica:



8 **Estudia i representa $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$.**

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Domini de definició: $\mathbb{R} - \{0\}$

Asímptota vertical: $x = 0$. Posició $\left\langle \begin{array}{l} x \rightarrow 0^-, \ f(x) \rightarrow -\infty \\ x \rightarrow 0^+, \ f(x) \rightarrow -\infty \end{array} \right.$

Asímptota horitzontal:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1; \ y = 1. \text{ Posició } \left\langle \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, \ f(x) < 1 \\ x \rightarrow -\infty, \ f(x) < 1 \end{array} \right.$$

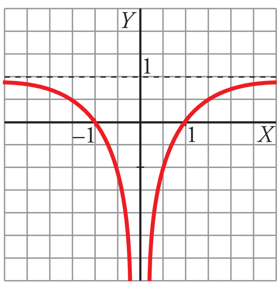
Punts singulars:

$$f'(x) = \frac{2x\, x^2 - (x^2 - 1)\, 2x}{(x^2)^2} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{2}{x^3} = 0. \text{ No té solució.}$$

No té punts singulars.

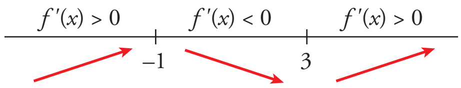
Aquesta és la seva gràfica:



9 **Determina els intervals de creixement i de decreixement de $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.**

$f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x \rightarrow f'(x) = x^2 - 2x - 3$

Busquem els valors de x per als quals $f'(x) > 0 \rightarrow x^2 - 2x - 3 > 0$



Intervals de creixement de f: $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$

Intervals de decreixement de f: $(-1, 3)$

La funció té un màxim en $x = -1$ i un mínim en $x = 3$.

10 **Calcula el valor de b i c perquè la funció $y = x^3 + bx^2 + c$ tingui un punt singular en $P(2, -3)$.**

Si $P(2, -3)$ és un punt singular, aleshores:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = -3 \\ f'(2) = 0 \end{array}\right\}$$

$f'(x) = 3x^2 + 2bx$

Resolem el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 2^3 + b \cdot 2^2 + c = -3 \\ 3 \cdot 2^2 + 2b \cdot 2 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 4b + c = -11 \\ 4b = -12 \end{array}\right\} \rightarrow b = -3, \; c = 1$$

11 **Troba dos nombres la suma dels quals sigui 34 i tals que el seu producte sigui màxim.**

Suposem que els nombres són x i y:

$x + y = 34 \rightarrow y = 34 - x$

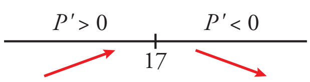
Busquem el producte màxim:

$P = xy = x(34 - x) = 34x - x^2$

$P' = 34 - 2x$

$P' = 0 \rightarrow 34 - 2x = 0 \rightarrow x = 17 \rightarrow y = 17$

Comprovem que el valor obtingut és un màxim del producte



Per tant, els nombres són $x = 17$, $y = 17$ i el producte màxim és 289.